REPRESENTATIES MODULO p VAN $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$

BEGELEIDER: MISJA STEINMETZ

Zij E een lichaam en V een vectorruimte. We schrijven $\mathrm{Aut}(V)$ voor de verzameling van inverteerbare E-lineare afbeeldingen $f\colon V \to V$. Als G een groep is en $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ een groepshomomorphisme, dan heet het paar (ρ, V) een *E-representatie* van de groep G. Bijvoorbeeld, het paar $(\rho, \mathbf{R}^2)$ waar $\rho\colon \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ gegeven is door

$$\begin{cases} 0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

geeft een $\mathbf{R}$-representatie van de groep $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Voor een deelruimte $W \subseteq V$, noemen we (ρ, W) een deelrepresentatie van (ρ, V) als $\rho(g)(W) = W$ voor alle $g \in G$. Het is duidelijk dat deelruimtes $0 \subseteq V$ en $V \subseteq V$ altijd leiden tot deelrepresentaties. We noemen een representatie (ρ, V) irreducibel als dit de enige twee deelrepresentaties zijn. In ons voorbeeld hierboven geven de lineaire opspansels van de vectoren $(1, 1)^{\mathrm{T}}$ en $(1, -1)^{\mathrm{T}}$ twee niet-triviale deelrepresentaties, dus deze representatie is niet irreducibel. Het hoofddoel van dit project is het classificeren van alle irreducibele $\mathbf{F}_p$-representaties van de groep $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$, waar $\mathbf{F}_p$ zoals gebruikelijk staat voor het eindige lichaam met p elementen voor een priemgetal p.

Representaties zijn niet meer weg te denken uit de hedendaagse wiskunde. Ze zijn niet alleen heel belangrijk voor de algebraïci, maar ook de getaltheoretici kunnen niet meer zonder representatietheorie. Misschien herinner je je nog van Algebra 3 dat de moeilijke oneindige groep $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ niet helemaal welgedefinieerd is omdat de definitie afhangt van de keuze van de algebraïsche afsluiting $\overline{\mathbf{Q}}$ van $\mathbf{Q}$: de groep is slechts gedefinieerd op 'inwendig automorfisme' na. Het blijkt dat representaties van inwendig automorfe groepen equivalent zijn aan elkaar, dus het lijkt geen slecht idee om deze groep te bestuderen via zijn representatietheorie. Dit geeft inderdaad een succesvolle en krachtige aanpak, die bijvoorbeeld veelvuldig terugkomt in Wiles' bewijs van Fermat.

In dit project bekijken we geen representaties $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, maar van eindige groepen zoals $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ in de hoop dat de student zelf ook wat kan toevoegen door bijvoorbeeld het oplossen van opgaven. Maar ook de $\mathbf{F}_p$-representaties van $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ zijn belangrijk in de hedendaagse getaltheorie omdat we uit deze representaties representaties van andere groepen kunnen construeren die een belangrijke rol spelen in het *Langlangs programma*.

Wij volgen het liefst het document van Laurent Berger en Sandra Rozensztajn [1] waarin de student door het oplossen van de opgaven zelf de belangrijke resultaten bewijst (met hulp natuurlijk van begeleider waar nodig). Zo nodig zijn er ook vele goede andere referenties beschikbaar zoals [2], [3] en [4]. Handige voorkennis voor dit project zijn Algebra 1, 2 en 3 en Lineaire Algebra 1 en 2. Daarnaast ligt het voor de hand dat de student tegelijkertijd het vak Representation Theory volgt, hoewel dit niet strikt noodzakelijk is. Dat vak gaat namelijk (bijna) alleen maar over $\mathbf{C}$-representaties terwijl we in dit project juist $\mathbf{F}_p$-representaties willen classificeren.

References

[1] Laurent Berger and Sandra Rozensztajn, *Modular Representations of* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$. Beschikbaar online: `http://perso.ens-lyon.fr/laurent.berger/autrestextes/GL2promys.pdf`

[2] Gordon James and Martin Liebeck, *Representations and Characters of Groups*, Cambridge University Press, 2001.

[3] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] Serge Lang, *Algebra, third ed.*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.

Kantoor 227a, Mathematisch Instituut, Niels Bohrweg 1, 2333 CA, Leiden
Email address: `m.f.a.steinmetz@math.leidenuniv.nl`

Date: december 2020.