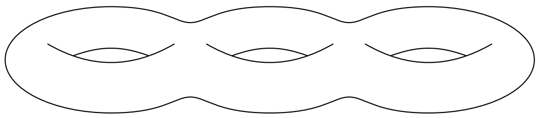
Periodieke automorfismen van grafen en oppervlakken (begeleider: R. de Jong)

Zij X een topologische ruimte en $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ een ondergroep. In de algebraïsche topologie kent men aan X een scala van interessante groepen toe zoals de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x)$, de homologiegroepen $H_k(X)$, de cohomologiegroepen $H^k(X, \mathbb{Z}), \ldots$ De zogenaamde "functorialiteit" brengt zich mee dat G door middel van automorfismen werkt op de groepen $H_*(X)$, $H^*(X, \mathbb{Z}), \ldots$ Het is interessant om te kijken wat we over deze werkingen kunnen zeggen voor gegeven standaardruimtes X, bijvoorbeeld in het geval dat de groep G *eindig* is. Bijvoorbeeld, wanneer is de geïnduceerde werking van G *trouw* ?

In dit project nemen we voor X een *compacte topologische graaf*, of een *compact orienteerbaar oppervlak*. Een compact orienteerbaar oppervlak is een eindige disjuncte vereniging van ruimtes van de vorm



dat wil zeggen een torus met meerdere "gaten". Het aantal "gaten" in een compact orienteerbaar oppervlak X noemen we het *geslacht* van X, notatie $g = g(X)$. Voor een compact orienteerbaar oppervlak X is de enige "interessante" homologiegroep de groep $H_1(X)$, en er geldt $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Voor een samenhangende compacte topologische graaf X is ook de enige "interessante" homologiegroep de groep $H_1(X)$, en als X v hoekpunten heeft en e kanten en we zetten $b = e - v + 1$, dan is $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^b$.

In de literatuur zijn diverse bewijzen te vinden van de volgende twee stellingen.

Stelling 1. *Zij X een compact orienteerbaar oppervlak waarin elke samenhangscomponent geslacht minstens twee heeft. Zij $f \colon X \to X$ een automorfisme van eindige orde. Als f triviaal werkt op $H_1(X)$, dan geldt $f = \mathrm{id}_X$.*
Stelling 2. *Zij X een eindige graaf zonder lussen. Zij $f \colon X \to X$ een automorfisme van eindige orde. Neem aan dat f alle hoekpunten van graad 0, 1 of 2 vast laat. Als f triviaal werkt op $H_1(X)$, dan geldt $f = \mathrm{id}_X$.*

Een eerste doel is om een aantal van deze bewijzen door te nemen, en daarvoor de benodigde technieken te leren: (co)homologie, simpliciale approximaties, Riemann-Hurwitz formules, dekpuntsstelling van Lefschetz, enz.

Een tweede doel is om naar varianten en veralgemeningen van deze twee Stellingen te zoeken. Wat gebeurt er als je de voorwaarden wat verzwakt? Wat kunnen we zeggen over ruimtes X die verkregen worden door op een compact orienteerbaar oppervlak paarsgewijs punten met elkaar te identificeren? Het lijkt erop dat dit geval met een geschikte combinatie van Stelling 1 en Stelling 2 kan worden geanalyseerd.

Voorkennis: *Algebra 1, Lineaire Algebra 1 en 2, Topologie.* Het is nuttig het college *Inleiding in de Algebraïsche Topologie* gevolgd te hebben.