Symmetrieën in de Natuurkunde

AMG Seminarium 2022

Tiago Scholten

2 maart 2022

Spoedcursus Theoretische Natuurkunde

- In de theoretische natuurkunde is alles een veld
- Een veld is een C^∞ functie $\phi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{C}^k$, $k \geq 1$
- $\phi(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$ betekent dat er een deeltje is op $\vec{\mathbf{x}}$.
- Actie S is functie van velden $\phi_1, \ldots, \phi_n$.
- Termen van de vorm $\langle \phi_i, \phi_j \rangle$ en $\langle \partial_\mu \phi_i, \partial_\mu \phi_j \rangle$.
- Invariant onder $\phi_i \mapsto e^{i\alpha}\phi_i$, $\alpha \in \mathbf{R}$.
- Neem $\alpha : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, nieuw veld.
- Nieuwe definitie afgeleide nodig.

Gladde variëteiten

Definitie

Een **gladde variëteit** van dimensie m is een Hausdorff topologische ruimte M met aftelbare basis en open overdekking $\{U_i\}_{i \in I}$ z.d.d.

- $\psi_i : U_i \to \tilde{U}_i \subset \mathbf{R}^m$ zijn homeomorfismen
- $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \to \psi_j(U_i \cap U_j)$ zijn diffeomorfismen

Gladde variëteiten

Voorbeelden van gladde variëteiten zijn

- $\mathbf{R}^n$, S^n van dimensie n
- $\mathbf{C}^n, \mathbf{CP}^n$ van dimensie $2n$
- Möbius band van dimensie 2
- Het product van twee gladde variëteiten $M \times N$

Gladde variëteiten

Definitie

Zij $(M, \{(U_i, \psi_i, \tilde{U}_i)\}_{i\in I})$ en $(N, \{(V_j, \phi_j, \tilde{V}_j)\}_{j\in J})$ gladde variëteiten. Een afbeelding $f : M \to N$ is **glad** als f continu is en alle $\phi_j \circ f \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) \to \phi_j(f(U_i) \cap V_j)$ C^∞ zijn.

Definitie

Een **diffeomorfisme** tussen gladde variëteiten M, N is een gladde afbeelding $f : M \to N$ met gladde inverse $f^{-1} : N \to M$. In dat geval zijn M, N diffeomorf en schrijven we $M \cong N$.

Lie Groepen

Definitie

Een **Lie groep** is een groep G die ook een gladde variëteit is, waarvoor de groepsoperatie en de inverse gladde afbeeldingen zijn.

Voorbeelden:

- $(\mathbf{R}, +), (\mathbf{R}_{>0}, \cdot)$
- $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$
- $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$
- $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$
- Allemaal van deze vorm!

Lie Groepen

Definitie

Een **Lie groep homomorfisme** is een groepshomomorfisme f die ook glad is. Als f een diffeomorfisme is, noemen we f een **Lie groep isomorfisme**

Zo blijken sommige voorbeelden isomorf te zijn

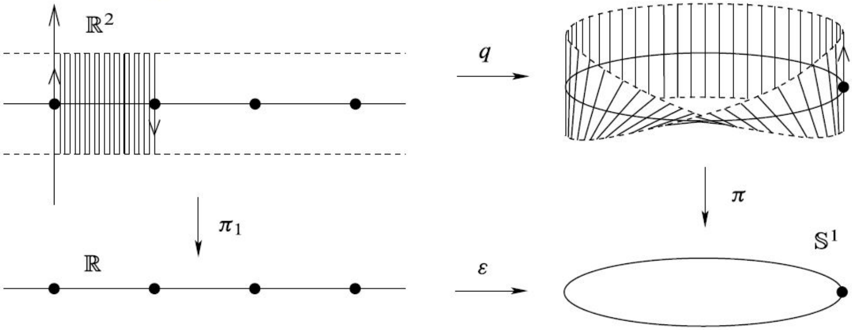
$$\mathrm{SO}(2) \cong \mathrm{U}(1) \cong S^1$$

Vezelbundels

Definitie

Een **vezelbundel** is tupel (E, π, M, F) met E, M, F gladde variëteiten, $\pi : E \to M$ een gladde surjectie en een open overdekking $\{U_i\}_{i \in I}$ van M met diffeomorfismen $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \overset{\sim}{\to} U_i \times F$, genaamd **trivalisaties**.

Vezelbundels



,

Fig. 10.2 Part of the Möbius bundle

$(x, y) \sim (x', y')$ als $\exists k \in \mathbf{Z}$ met $(x', y') = (x + 2\pi k, (-1)^k y)$

Vezelbundels

Definitie

Afbeeldingen tussen (E, π, M, F) en (E', π', M, F) zijn gladde $H : E \to E'$ met $\pi' \circ H = \pi$. Als $H : E \to E'$ een diffeomorfisme is, noemen we E en E' isomorf.

Definitie

Een vezelbundel is **triviaal** als deze isomorf is met $M \times F$.

Als M samentrekbaar is, zijn alle vezelbundels over M triviaal.

Groepswerkingen

Definitie

Zij G een Lie groep en M een gladde variëteit. We zeggen dat G op M **werkt** als er een Lie groep homomorfisme $\phi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ bestaat. We schrijven $mg := \phi(g)(m)$.

Voorbeeld: $U(1)$ werkt op $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ door rotaties.

Hoofdvezelbundels

Definitie

Een **hoofdvezelbundel** is een vezelbundel (P, π, M, G) zodanig dat

- G is een Lie groep die op P werkt
- $\pi(p) = \pi(pg), \forall p \in P, g \in G$
- Voor de $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \overset{\sim}{\to} U_i \times G$ geldt $\phi(p) = (m, g)$ impliceert $\phi(ph) = (m, gh)$ voor alle $p \in \pi^{-1}(U_i), g, h \in G$ en $m = \pi(p)$.

Uit de definitie volgt dat $\pi^{-1}(m) \cong G$ voor alle $m \in M$.

Hoofdvezelbundels

Definitie

Afbeeldingen tussen hoofdvezelbundels, zijn afbeeldingen tussen vezelbundels compatibel met de werking van G.

Voorbeelden:

- Voor $P = S^{n+1}$ en $G = \mathrm{U}(1)$ kunnen we $M = \mathbf{PC}^n$ nemen. Deze constructie heet de **Hopfbundel**.
- M een samenhangende gladde variëteit, $P = \tilde{M}$ de universele overdekking, $G = \pi_1(M)$

Secties

Definitie

Een **globale sectie** van een vezelbundel (E, π, M, F) is een gladde $s : M \to E$ met $\pi \circ s = \mathrm{id_M}$ Een **lokale sectie** is een afbeelding $s : U \to E$ met $U \subset M$ open.

Secties van hoofdvezelbundels zijn de keuze van een symmetrie en corresponderen dus met $e^{i\alpha}$. In het standaard model geldt $G = \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(3)$. Een keuze van een symmetrie heet een **gauge**.

Secties

Stelling

Gauges corresponderen bijectief met trivalisaties van de hoofdvezelbundel

Schets bewijs

Zij (P, π, M, G) een hoofdvezelbundel en $U \subset M$ open. Gegeven een lokale sectie $s : U \to G$ construeren we de trivalisatie

$$U \times G \ni (m, g) \mapsto s(m)g \in \pi^{-1}(U)$$

Duidelijk glad, bijectief want $s(m)$ kiest een punt uit iedere vezel en alle vezels zijn diffeomorf met G dus vermenigvuldiging met alle $g \in G$ geeft de hele vezel. Inverse is ook glad.

Gauges kan je dus zien als coordinaten kiezen.

Complexe vectorbundels

Definitie

Een **complexe vectorbundel** is een vezelbundel (E, π, M, V) met V en iedere vezel een vector ruimte over $\mathbf{C}$. Zodanig dat de restrictie van $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \overset{\sim}{\to} U_i \times V$ tot iedere vezel lineair is.

Representaties

Definitie

Zij G een Lie groep. Een **(complexe) representatie** van G een is tupel (V, ρ) met V een vectorruimte over $\mathbf{C}$ en $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$ glad. Het is dus een werking van G op $V \cong \mathbf{R}^{2n}$ waarvoor iedere $g \in G$ linear werkt.

Geassocieerde vectorbundels

Definitie

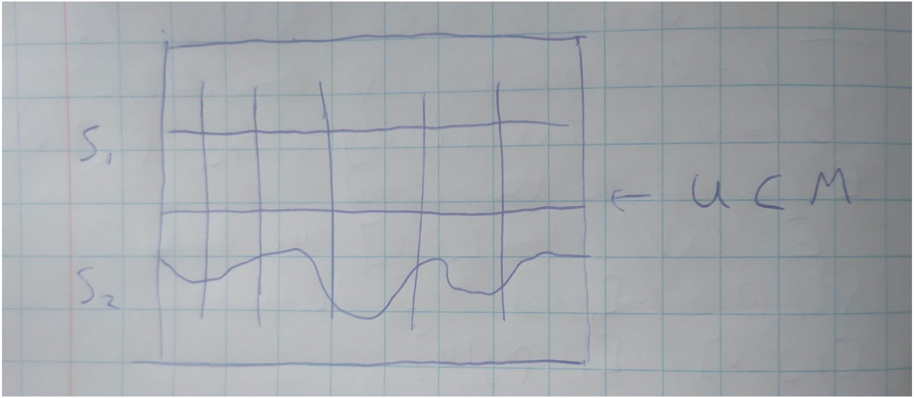
Zij (P, π, M, G) een hoofdvezelbundel, V een vectorruimte over $\mathbf{C}$ en $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$ een representatie. We laten G op $P \times V$ werken door $(p, v)g = (pg, \rho(g)^{-1}v)$. We noemen $E = P \times V/G$ de **geassocieerde vectorbundel** met als elementen equivalentieklassen $[p, v]$ met $[pg, v] = [p, \rho(g)v]$. Vezels zijn een vector ruimte door

$$\lambda[p, v] + \mu[p, w] = [p, \lambda v + \mu w]$$

Secties van geassocieerde vectorbundels zijn dus paren van keuze symmetrie in P en een veld in V en de werking van G uitdelen identificeert velden die een constante symmetrie verschillen.

Wat ik ga doen

Doel: Correctie op afgeleide door verandering in symmetrie.
Probleem: Hoe identificeer je verschillende vezels?
Oplossing: Connecties.



Wat ik ga doen

- Zwaartekracht beschreven met algemene relativiteitstheorie.
- Ruimte is lokaal isometrisch met $\mathbf{R}^4$.
- Ruimte-tijd M is $\mathbf{R}^4$ met metriek.
- Metriek is isometrie tussen raakruimten en $\mathbf{R}^4$.
- Equivalent met basis kiezen.
- Metriek correspondeert met sectie framebundel van alle bases.
- Connectie bepaalt welke secties gekozen worden.
- Einstein's vergelijking verbindt aanwezigheid massa en connectie.