SIDON-VERZAMELINGEN

Jan-Hendrik Evertse

Een *Sidon-verzameling* is een deelverzameling $\mathcal{A}$ van $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ zodat alle sommen $a + b$ $(a, b \in A)$ verschillend zijn. Zo'n verzameling kan eindig of oneindig zijn. Bijvoorbeeld de verzameling van machten van 2, $\{1, 2, 4, \ldots\}$ is zeker een Sidon-verzameling want $2^u + 2^v \neq 2^{u'} + 2^{v'}$ wanneer $(u, v) \neq (u', v')$.

Een Sidon-verzameling $\mathcal{A}$ die bevat is in $\{1, 2, \ldots, N\}$ heeft hoogstens $\sqrt{2N - 1}$ elementen, want er zijn $(\#\mathcal{A})^2$ verschillende sommen $a + b$ met $a, b \in \mathcal{A}$ en die liggen allemaal in $\{2, \ldots, 2N\}$. Erdős en Turán bewezen in 1941 de volgende stelling:

Stelling. *(i). Voor elke* $\epsilon > 0$ *is er een* $N_0(\epsilon)$ *zodat voor alle* $N > N_0(\epsilon)$, *elke Sidon-deelverzameling van* $\{1, \ldots, N\}$ *hoogstens* $(1 + \epsilon)\sqrt{N}$ *elementen heeft.*

(ii). Voor elke $\epsilon > 0$ *is er een* $N_1(\epsilon)$ *zodat er voor elke* $N > N_1(\epsilon)$ *een Sidon-deelverzameling is van* $\{1, \ldots, N\}$ *met minstens* $(\sqrt{2}^{-1} - \epsilon)\sqrt{N}$ *elementen.*

Een andere kwestie betreft de dichtheid van oneindige Sidon-verzamelingen. Laat $\mathcal{A}$ een oneindige Sidon-verzameling zijn. De dichtheidsfunctie $N_{\mathcal{A}}(X)$ van $\mathcal{A}$ is het aantal getallen in $\mathcal{A}$ kleiner of gelijk aan X. Natuurlijk is $N_{\mathcal{A}}(X) \leq \sqrt{2X - 1}$. De vraag is om $\mathcal{A}$ te construeren waarvoor $N_{\mathcal{A}}(X)$ zo groot mogelijk is. De tot nu toe best bekende constructie is van Rusza (1998). Hij liet zien dat er een oneindige Sidon-verzameling $\mathcal{A}$ bestaat met $N_{\mathcal{A}}(X) \geq X^{\sqrt{2}-1+o(1)}$ voor alle X (we schrijven $o(1)$ voor een functie van X die naar 0 gaat als X naar oneindig gaat).

Het doel van het bachelorproject is om bovenstaande constructies of eventueel andere te bestuderen. De wiskunde waarmee je te maken krijgt vereist weinig voorkennis: mogelijk wat combinatoriek of wat analyse.