Fundamentaalgroepoïden en de Stelling van Van Kampen (begeleider: R. de Jong)

Egbert Rudolf van Kampen studeerde en promoveerde in Leiden. De beroemde Stelling die naar hem vernoemd is beschrijft de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x)$ van een topologische ruimte X met basispunt $x \in X$ in termen van de fundamentaalgroepen van geschikte deelruimtes van X die x bevatten.

Met behulp van de Stelling van Van Kampen is bijvoorbeeld eenvoudig aan te tonen dat de eenheidsbollen S^n voor $n \geq 2$ enkelvoudig samenhangend zijn (d.w.z. een triviale fundamentaalgroep hebben). Er zijn nog veel meer aardige toepassingen. In het project kunnen we hier zeker naar kijken.

Helaas is de Stelling van Van Kampen in haar meest bekende vorm niet geschikt om de fundamentaalgroep van de cirkel S^1 te berekenen. Wat er in feite aan de hand is, is dat de noodzaak om een basispunt $x \in S^1$ te kiezen in de weg zit. De wiskundige Alexander Grothendieck schrijft hierover met grote stelligheid in zijn *Esquisse d'un programme*:

> *[...] people still obstinately persist, when calculating with fundamental groups, in fixing a single base point, instead of cleverly choosing a whole packet of points which is invariant under the symmetries of the situation, which thus get lost on the way. In certain situations (such as descent theorems for fundamental groups à la Van Kampen Theorem) it is much more elegant, even indispensable for understanding something, to work with fundamental groupoids with respect to a suitable packet of base points, [...]*

In dit project volgen we de hint van Grothendieck op en zullen we voor elke deelverzameling $A \subset X$ de *fundamentaalgroepoïde* $\underline{\Pi}(X, A)$ definiëren. Voor A een singleton krijgen we het oude concept van een fundamentaalgroep. Een groepoïde is een speciaal soort *categorie*. Onderdeel van het project is dan ook om vertrouwd te raken met de taal van categorieën en functoren.

We zullen kijken naar een bewijs van een "Stelling van Van Kampen" voor fundamentaalgroepoïden. Ook zullen we toepassingen van deze meer algemene Stelling van Van Kampen bekijken. Een eerste aardig resultaat is dat we nu de fundamentaalgroep van S^1 kunnen berekenen door voor $A \subset S^1$ een verzameling van *twee* punten te kiezen. Wat dieper: in [1] wordt een bewijs van de Stelling van Jordan uitgaande van deze meer algemene Stelling van Van Kampen gegeven – hoe verschilt dit van de aanpak in bijv. het boek [2] van Fulton?

Tijdens het college Inleiding in de Algebraïsche Topologie is een "inzichtelijk" bewijs van de Stelling van Van Kampen voor fundamentaalgroepen gegeven (voor X die aan geschikte redelijke lokale eisen voldoen) door voor elke groep G de verzameling $\mathrm{Hom}(\pi_1(X, x), G)$ topologisch te interpreteren in termen van overdekkingsruimten, en door overdekkingsruimten te plakken. Kan zoiets ook in de context van fundamentaalgroepoïden, door voor elke groepoïde $\underline{G}$ te kijken naar $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\Pi}(X, A), \underline{G})$ en dat topologisch te interpreteren?

Voorkennis: Algebra 1, Topologie, en bij voorkeur Inleiding in de Algebraïsche Topologie.

Referenties

[1] Ronald Brown. *Topology and groupoids.* BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.

[2] William Fulton. *Algebraic topology: A first course*, volume 153 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995.