Meetbare kardinaalgetallen

Voor directe producten van de groep $\mathbb{Z}$ der gehele getallen leidt de vraag naar de aard van de homomorfismen naar $\mathbb{Z}$ tot interessante verzamelingenleer.

Er zijn makkelijke homomorfismen van $\mathbb{Z}^I$ naar $\mathbb{Z}$. Voor elke $i \in I$ is evaluatie in i een homomorfisme, in formulevorm: voor elke i is $f_i : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}$ gegeven door $f_i(x) = x_i$ een homomorfisme.

Elke $\mathbb{Z}$-lineaire combinatie $\sum_{i \in F} a_i f_i$ van dergelijke homomorfismen is ook een homomorfisme (F een eindige deelverzameling van I en elke $a_i \in \mathbb{Z}$.

Als $I = \mathbb{N}$ dan zijn dit *alle* homomorfismen.

Hoe zit het met andere verzamelingen I?

Als je meer wilt dan deze homomorfismen moet je een verzameling I en daarop een niet-triviaal σ-volledig ultrafilter U hebben; dat is een ultrafilter dat gesloten is onder doorsneden van aftelbare deelfamilies, en niet-triviaal betekent dat er geen i is zó dat $U = \{A : i \in A\}$. Zo'n U bepaalt een homomorfisme $f_U : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}$ door $f_U(x) = a$ als $\{i : x_i = a\} \in U$.

Dergelijke ultrafilters en hun onderliggende verzamelingen hebben allerlei interessante combinatorische eigenschappen en die zullen we in dit project bekijken. Dergelijke verzamelingen zijn ontzagwekkend groot en als je aanneemt dat ze bestaan kun je bewijzen dat de verzamelingenleer consistent is. En ook moet natuurlijk duidelijk worden wat dit met 'meetbaarheid' te maken heeft.