Oplossingen van kwadratische vormen
(begeleider: Martin Bright)

Een *kwadratische vorm* is een homogeen polynoom van graad 2 in meerdere variabelen, bijvoorbeeld $x^2 + y^2 - z^2$. Dit project gaat over geheeltallige oplossingen van kwadratische vormen: gegeven een kwadratische vorm f in n variabelen, hoe kun je de verzameling

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

beschrijven?

Voor de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$ is het verhaal heel bekend. Door middel van een meetkundige constructie krijg je een parametrisatie van de *rationale* oplossingen: deze worden gegeven door scalaire veelvouden van $(t^2 - 1, 2t, t^2 + 1)$ voor rationale getallen t, samen met $(1, 0, 1)$.

Voor geheeltallige oplossingen is het iets meer subtiel. Het is voldoende om de *coprieme* oplossingen te beschrijven (want bijvoorbeeld, $(6, 8, 10)$ is een veelvoud van de coprieme oplossing $(3, 4, 5)$). Als je $t = u/v$ in de bovenstaande formule invult en noemers wegwerkt, dan krijg je de oplossing

$$(x, y, z) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2).$$

Maar als je hier geheeltallige u, v invult, dan krijg je alleen oplossingen met y *even*: bijvoorbeeld, $(u, v) = (1, 2)$ geeft $(x, y, z) = (3, 4, 5)$, maar de oplossing $(4, 3, 5)$ zul je nooit krijgen. In feit blijkt het dat alle coprieme geheeltallige oplossingen beschreven worden door de *twee* parametrisaties

$$(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2) \text{ en } (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$$

voor $u, v \in \mathbb{Z}$ copriem.

De vraag waar dit project over gaat is dus: in hoeverre kan dit uitgebreid worden tot andere kwadratische vormen in drie of zelfs meer variabelen? Is het altijd waar dat er eindig veel parametrisaties zijn die alle coprieme geheeltallige oplossingen beschrijven?