Twists

Bachelorproject, Leiden
Ronald van Luijk

Sommige objecten in de wiskunde, zoals vectorruimtes, hebben een grondlichaam. Stel $K \subset L$ is een lichaamsuitbreiding. Het zogenoemde tensorproduct stelt ons in staat om aan elke vectorruimte V over K een vectorruimte $V_L = V \otimes_K L$ over L toe te kennen. In veel gevallen is daar geen begrip van het tensorproduct voor nodig. Voor elk geheel getal n kennen we bijvoorbeeld aan de vectorruimte K^n over K, de vectorruimte L^n over L toe. Net zo kunnen we aan een K-algebra R een L-algebra $R_L = R \otimes_K L$ toekennen. Voor de K-algebra $\mathrm{Mat}(n, K)$ van $n \times n$ matrices over K krijgen we zo de L-algebra $\mathrm{Mat}(n, L)$ van $n \times n$ matrices over L. We noemen V_L en R_L de *basisuitbreidingen* naar L van respectievelijk V en R.

Definitie (vaag door overgeneraliseren). Zij K een lichaam en $\mathcal{T}$ een type van objecten waarvoor basisuitbreidingen bestaan. Zij X een object van type $\mathcal{T}$ over K. Een *twist* van X is een object Y van type $\mathcal{T}$ over K, zodanig dat er een lichaamsuitbreiding L bestaat waarvoor de basisuitbreidingen X_L en Y_L isomorf zijn over L. Een *triviale twist* van X is een twist van X die over K isomorf is met X.

Voorbeeld. We nemen voor $\mathcal{T}$ het type Algebra. De ring van *quaternionen* is de $\mathbb{R}$-algebra H van dimensie 4 over $\mathbb{R}$, voortgebracht door elementen $i, j \in H$ die voldoen aan $i^2 = j^2 = -1$ en $ij = -ji$. Een basis voor H als $\mathbb{R}$-vectorruimte is $(1, i, j, ij)$. De vermenigvuldiging is niet commutatief. Wel heeft elk niet-nul element een inverse: voor elke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a + bi + cj + dij \neq 0$ geldt

$$(a + bi + cj + dij)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (a - bi - cj - dij).$$

Dit betekent dat de ring H een *delingsring* is.

Als we het grondlichaam $\mathbb{R}$ in bovenstaande constructie vervangen door $\mathbb{C}$, dan krijgen we een $\mathbb{C}$-algebra $H_{\mathbb{C}}$ (waarvan je later zult zien dat dit het zogenoemde tensorproduct $H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ is), die **geen** delingsring is, want er zijn nuldelers. Schrijven we om verwarring te voorkomen ζ voor een wortel van -1 in $\mathbb{C}$, dan geldt bijvoorbeeld $(1 + \zeta i)(1 - \zeta i) = 1 - \zeta^2 i^2 = 1 - (-1) \cdot (-1) = 0$.

De $\mathbb{C}$-algebra $H_{\mathbb{C}}$ is isomorf met de $\mathbb{C}$-algebra $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$. Een isomorfisme wordt gegeven door

$$a + bi + cj + dij \mapsto \begin{pmatrix} a + b\zeta & c + d\zeta \\ -c + d\zeta & a - b\zeta \end{pmatrix}.$$

De nuldeler $1 + \zeta i \in H$ wordt gestuurd naar de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix A is ook een nuldeler in de $\mathbb{R}$-algebra $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, die dus **niet** isomorf is met H. We concluderen dat H een niet-triviale twist van $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ is.

Project. Het doel van dit project is om met behulp van Galois cohomologie deze twists beter te begrijpen. De precieze invulling van het project is flexibel. We kunnen meer ingaan op de Galois cohomologie, of kijken naar specifieke voorbeelden, zoals twists van projectieve ruimtes $\mathbb{P}^n$ (met n een geheel getal). Deze laatste twists heten ook wel *Brauer-Severi variëteiten*. Met behulp van Galois cohomologie kunnen we bewijzen dat elke n-dimensionale Brauer-Severi variëteit over K met een K-rationaal punt isomorf is met $\mathbb{P}^n$. Het geval $n = 1$ is al interessant.