Groepen met weinig commutatoren

Dit project is geschikt voor een student die van groepentheorie houdt.

Laat G een groep zijn, en neem aan dat G multiplicatief genoteerd wordt. Voor x, $y \in G$ schrijven we $[x, y]$ voor het element $xyx^{-1}y^{-1}$ van G; dit element heet de *commutator* van x en y. De verzameling van alle commutatoren in G, die geen standaardnotatie heeft, noteren we hier met $\langle G, G\rangle$; dus $\langle G, G\rangle = \{[x, y] : x,\ y \in G\}$; de notatie $[G, G]$ is voorbehouden aan de ondergroep die door $\langle G, G\rangle$ wordt voortgebracht. Voorbeelden waarin $[G, G]$ ongelijk aan $\langle G, G\rangle$ is, zijn niet eens zo gemakkelijk te geven, maar die zijn wel belangrijk voor het project.

Uitgangspunt van het project is de stelling dat als $\langle G, G\rangle$ eindig is, ook de ondergroep $[G, G]$ eindig is. Ieder mij bekend bewijs van deze stelling laat zelfs iets scherpers zien; namelijk, als n een gegeven positief geheel getal is, en G loopt over alle groepen met $\#\langle G, G\rangle = n$ (zulke groepen bestaan), dan neemt $\#[G, G]$ een maximum aan. Dit maximum geven we met $\kappa(n)$ aan (voorbeeld: $\kappa(1) = 1$). Deze scherpere stelling is ook voor eindige groepen interessant. Het project bestaat eruit de functie κ te bestuderen. Het is waarschijnlijk te optimistisch om te verwachten dat er een eenvoudige formule voor $\kappa(n)$ is in termen van n, maar het aangeven van bovengrenzen en ondergrenzen voor $\kappa(n)$ is ook waardevol. Asymptotische resultaten voor $n \to \infty$ zijn het interessantst, maar kleine waarden voor n kunnen ook bestudeerd worden. Ik geloof bijvoorbeeld dat geldt $\kappa(n) = n$ voor alle $n \leq 4$, maar weet niet hoe het met $n = 5$ zit. Wat is de kleinste n met $\kappa(n) > n$?

Alle bewijzen van de genoemde stelling die ik ken, maken gebruik van de volgende stelling van Issai Schur (Duits wiskundige, 1875–1941): als G een groep is met centrum $\mathrm{Z}(G)$, en de groep $G/\mathrm{Z}(G)$ is eindig, dan is $[G, G]$ ook eindig. Hiervan bestaan vele bewijzen, en het is nuttig deze allemaal te bestuderen. Elk bestaand bewijs geeft namelijk, net als bij de eerdere stelling, een bovengrens voor $\#[G, G]$ die een functie van $\#(G/\mathrm{Z}(G))$ is, en verschillende bewijzen geven verschillende bovengrenzen. Het ziet er bovendien naar uit dat de beste bovengrens wordt gegeven als men het meest geavanceerde bewijs gebruikt, dat gebruikmaakt van de zogenaamde *Schur multiplier* van een groep. Het bestuderen van de Schur multiplier, en verwante begrippen zoals *Schur overdekkingen*, zal dan ook onderdeel van het project uitmaken. Met het aangeven van ondergrenzen ligt het hier wat anders dan bij het voorgaande probleem, omdat er niet voor ieder positief geheel getal n een groep G bestaat met $\#(G/\mathrm{Z}(G)) = n$; ik weet niet of het bekend is welke waarden wel voorkomen.

Hier zijn een paar verwante vragen. Is er voor elke groep G waarvoor $[G, G]$ eindig is, een eindige groep Γ waarvoor er een groepsisomorfisme $\sigma\colon [G, G] \to [\Gamma, \Gamma]$ bestaat met $\sigma(\langle G, G\rangle) = \langle \Gamma, \Gamma\rangle$? En zo ja, kan men in het geval $\#(G/\mathrm{Z}(G)) < \infty$ tevens eisen dat de groepen $G/\mathrm{Z}(G)$ en $\Gamma/\mathrm{Z}(\Gamma)$ isomorf zijn? Is er, voor eindige groepen, een verband tussen de grootte van $[G, G]$ en het getal $c(G) = \{(x, y) \in G \times G : xy = yx\}/\#(G \times G)$? Bekend is bijvoorbeeld $c(G) > 5/8 \Leftrightarrow c(G) = 1 \Leftrightarrow \#[G, G] = 1$, en men kan ook bewijzen $c(G) > 1/2 \Leftrightarrow \#[G, G] \leq 2$.

De student zal ook de literatuur moeten bestuderen, om te zien welke van de opgeworpen vragen al beantwoord zijn, en hoe. Over de genoemde stelling van Schur is in elk geval veel te vinden.

Begeleider: Hendrik Lenstra