

Automorfismen van de Dwork-familie

Bachelorproject, begeleider: Emma Brakkee

10 januari 2023

De Dwork-familie: Voor $\lambda \in \mathbb{C}$ (een groot deel van het project werkt ook over algemenere lichamen) bestuderen we de algebraïsche kromme F_λ^2 in \mathbb{P}^2 gegeven door

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Algemener kunnen we voor elke $n \geq 2$ kijken naar de $(n - 1)$ -dimensionale variëteit F_λ^n in \mathbb{P}^n gegeven door

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \cdots + x_{n+1}^{n+1} - (n + 1)\lambda \prod_{i=1}^{n+1} x_i = 0.$$

De verzameling $\{F_\lambda^n \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ heet de *Dwork-familie*. Er zijn verschillende redenen om deze familie te bestuderen, waaronder het feit dat hij veel interessante symmetrieën heeft.

Het project: In dit project bestuderen we de groep G van automorfismen van \mathbb{P}^n die F_λ^n op zichzelf afbeelden. In het bijzonder induceren deze afbeeldingen automorfismen van F_λ^n . De groep G is beschreven door Bini en Garbagnati [1]. In het eerste deel van het project ga je de details uitwerken van de relevante delen van dit artikel (dat we ook deels als blackbox zullen gebruiken). Hierbij leer je onder andere over families van variëteiten en groepswerkingen op variëteiten, twee belangrijke concepten in de (algebraïsche) meetkunde.

Afhankelijk van de tijd en je interesses kunnen we in het tweede deel van het project één of beide van de volgende vragen bestuderen:

- De variëteiten F_λ^2 zijn krommen van graad 3 en hebben daarom een groepsstructuur. Wat is het effect van de automorfismen in G op deze groepsstructuur?
- Voor $n = 3$ en $\lambda = 0$ vinden we het oppervlak $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0$ in \mathbb{P}^3 , het *Fermat-oppervlak* (Engels: Fermat quartic surface). Dit oppervlak bevat 48 lijnen. Hoe werkt de groep G op deze lijnen?

Voorkennis: Het zou erg handig zijn als je het vak Algebraic Curves hebt gevolgd, hoewel het wel zou kunnen zonder: dan haal je eerst een deel van dat vak in en kan je daarna het eerste deel van dit project doen. Voor het tweede deel zou wat programmeerervaring van pas kunnen komen, afhankelijk van de richting waarin het project gaat.

Referentie: [1] G. Bini and A. Garbagnati, *Quotients of the Dwork Pencil*, Journal of Geometry and Physics **75** (2014), 173–198.