Machten van commutatoren

Dit is een onderwerp voor iemand die van groepentheorie houdt. In het bijzonder zal de student die het project uitvoert, te maken krijgen met de *combinatorische groepentheorie*, waarin men groepen bestudeert die gedefinieerd zijn via *voortbrengers* en *relaties*.

Als α, β elementen van een groep G zijn, dan heet het element $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ van G de *commutator* van α and β, notatie: $[\alpha, \beta]$; dus $[\alpha, \beta]$ wordt gekarakteriseerd door de eigenschap $\alpha\beta = [\alpha, \beta]\beta\alpha$. De ondergroep van G voortgebracht door de verzameling $\{[\alpha, \beta] : \alpha, \beta \in G\}$ van alle commutatoren heet de *commutator-ondergroep* van G, notatie: $[G, G]$. Het is helaas niet zo dat de verzameling commutatoren zelf een ondergroep is: weliswaar is het eenheidselement van G een commutator, en ook is de inverse van een commutator een commutator, maar het product van twee commutatoren hoeft niet een commutator te zijn.

Een stelling van K. Honda uit 1953 zegt dat in *eindige* groepen bepaalde *machten* van commutatoren ook commutatoren zijn. Deze stelling luidt als volgt.

Stelling 1. *Stel r is een geheel getal, G is een eindige groep, en α, β, $\gamma \in G$ voldoen aan $[\alpha, \beta] = \gamma$ en $\langle\gamma\rangle = \langle\gamma^r\rangle$. Dan bestaan er ϵ, $\zeta \in G$ met $[\epsilon, \zeta] = \gamma^r$.*

Het bewijs dat Honda van deze stelling gaf, maakt gebruik van *karakters*, en pas onlangs is er een volledig elementair bewijs gevonden. Uit dit nieuwe bewijs ziet men dat in feite de volgende stelling geldt, die Stelling 1 impliceert.

Stelling 2. *Stel r is een geheel getal, G is een eindige groep, en α, β, $\gamma \in G$ voldoen aan $[\alpha, \beta] = \gamma$, $\langle\alpha\rangle = \langle\alpha^r\rangle$ en $\langle\gamma\rangle = \langle\gamma^r\rangle$. Dan is er een element $\delta \in G$ waarvoor $[\alpha^r, \delta]$ geconjugeerd is met γ^r.*

Als men de voorwaarde dat G eindig is, in beide stellingen laat vallen, dan is het niet meer zo dat de eerste stelling uit de tweede volgt. In dat geval laat de eerste stelling tegenvoorbeelden toe, terwijl dit voor de tweede stelling onbekend is. Het voornaamste doel van het project is om deze laatste open vraag te bestuderen en misschien te beantwoorden.

Het nieuwe bewijs van de stelling van Honda maakt gebruik van het volgende resultaat.

Stelling 3. *Laat p een priemgetal zijn, G een eindige groep waarvan de orde niet deelbaar door p is, en $\mathbf{F}_p[G]$ de groepenring van G over het lichaam $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Definieer $\phi\colon \mathbf{F}_p[G] \to \mathbf{F}_p[G]$ door $\phi(\sum_{\sigma\in G} c_\sigma\sigma) = \sum_{\sigma\in G} c_\sigma\sigma^p$, voor $c_\sigma \in \mathbf{F}_p$. Dan geldt voor elke a in het centrum van $\mathbf{F}_p[G]$ de gelijkheid $\phi(a) = a^p$.*

Ook bij deze stelling kan men zich afvragen voor welke oneindige groepen dezelfde conclusie getrokken kan worden. Welke voorwaarde komt dan in de plaats van de voorwaarde dat p de groepsorde niet deelt?

Begeleider: Hendrik Lenstra