Stevige ringen

Dit is een onderwerp voor iemand die algebra leuk vindt. De student die dit project uitvoert, zal kennismaken met een aantal technieken uit de *commutatieve algebra*, d.w.z. de theorie der commutatieve ringen. Wellicht zal er ook enige algebraïsche getaltheorie bij komen kijken, maar wat hiervan nodig is, kan de student tijdens de uitvoering van het project leren.

Stel dat R een ring is en dat de additieve groep R^+ voor een of ander niet-negatief geheel getal n isomorf met $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ is. Dan is R ook als ring isomorf met $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Een elegant bewijs van deze bewering kan men als volgt geven. Voor elke ring R is er een injectief ringhomomorfisme $f\colon R \to \mathrm{End}(R^+)$ dat $r \in R$ afbeeldt op het endomorfisme $x \mapsto rx$ van R^+. Als R^+ isomorf is met $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ is, dan bewijst men gemakkelijk dat het unieke ringhomomorfisme $\mathbf{Z} \to \mathrm{End}(R^+)$ een ringisomorfisme $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathrm{End}(R^+)$ induceert. Omdat het beeld van f een deelring van $\mathrm{End}(R^+)$ is, en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ geen deelringen behalve zichzelf heeft, is f surjectief, en daarmee een isomorfisme van ringen.

In het algemeen noem ik een ring R *stevig* (Engels: *firm*) als de boven gedefinieerde afbeelding $f\colon R \to \mathrm{End}(R^+)$ een ringisomorfisme is. De terminologie verwijst naar het feit dat elke stevige ring "star" is; in het algemeen noemt men een wiskundige structuur *star* (Engels: *rigid*) als de automorfismengroep van de structuur—in ons geval de groep ringautomorfismen van R—alleen uit de identiteit bestaat. Ook is elke stevige ring commutatief, en in feite geldt: R is stevig dan en slechts dan als $\mathrm{End}(R^+)$ commutatief is. Net als bij $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ geldt dat als R een stevige ring is, elke ring met dezelfde additieve groep als R een uniek ringisomorfisme met R heeft.

Het project bestaat eruit stevige ringen te bestuderen, waarbij het zowel om algemene eigenschappen als om voorbeelden gaat.

Ongetwijfeld zijn de ringen $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ met $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ op isomorfie na de enige *eindige* stevige ringen, en is een lichaam stevig dan en slechts dan als het een priemlichaam is.

Stel K is een lichaamsuitbreiding van $\mathbf{Q}$ van eindige graad $[K : \mathbf{Q}]$. Welke deelringen van K zijn stevig? Voor $K = \mathbf{Q}$ is het antwoord eenvoudig: alle deelringen van $\mathbf{Q}$ zijn stevig. Voor $[K : \mathbf{Q}] = 2$ lijkt het erop dat voor een willekeurige deelring R van K geldt: R is stevig dan en slechts dan als R star is, en dan en slechts dan als ofwel R gelijk is aan $\mathbf{Q}$ ofwel er een priemgetal p is met $\#(R/pR) = p$. Voorbeeld: $R = \mathbf{Z}[1/(2 + \sqrt{-1})]$, met $p = 5$. Het zou mooi zijn als de student deze equivalenties kon bewijzen, en ook kon onderzoeken hoe de situatie in het geval van hogere graad ligt.

Een andere richting waarin gewerkt kan worden, is het bestuderen van stevige k-algebra's, waarbij k een commutatieve ring is, en we een k-algebra R stevig noemen als het beeld van $f\colon R \to \mathrm{End}(R^+)$ gelijk is aan de verzameling k-lineaire endomorfismen van R^+; voor $k = \mathbf{Z}$ krijgt men dan precies de stevige ringen.

Begeleider: Hendrik Lenstra