DE STELLING VAN ERDŐS-GINZBURG-ZIV

Jan-Hendrik Evertse

In 1961 bewezen Erdős, Ginzburg en Ziv de volgende stelling:

Stelling. *Laat n een positief geheel getal zijn, en $S = (a_1, \ldots, a_m)$ een rij gehele getallen van lengte $m \geq 2n-1$ met $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m$. Dan bevat S een deelrij $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ van lengte n, met $i_1 < \cdots < i_n$ zodat $a_{i_1} + \cdots + a_{i_n} \equiv 0 \pmod{n}$.*

Het bewijs van deze stelling is eenvoudige combinatoriek. De grens $2n-1$ is best mogelijk. Bijvoorbeeld de rij met $n-1$ nullen en $n-1$ enen bevat geen deelrij van lengte n waarvan de som van de termen deelbaar is door n.

Van deze stelling zijn allerlei generalisaties denkbaar. We zeggen dat een punt uit $\mathbb{Z}^d$ deelbaar is door n wanneer alle coördinaten van dat punt deelbaar zijn door n. Voor gehele getallen $n, d \geq 1$ definiëren we $f(n,d)$ als het kleinste natuurlijke getal m zodat elke rij roosterpunten uit $\mathbb{Z}^d$ van lengte m een deelrij van lengte n bevat waarvan de som van de termen deelbaar is door n. Bijvoorbeeld de rij van lengte $2^d(n-1)$ bestaande uit $n-1$ kopieën van elk roosterpunt uit $\{0,1\}^d$ bevat geen deelrij van lengte n waarvan de som van de termen deelbaar is door n. Dus $f(n,d) \geq 2^d(n-1)+1$. Kemnitz sprak in 1983 het vermoeden uit dat voor $d=2$ deze ondergrens de juiste waarde is van $f(n,d)$, dat wil zeggen $f(n,2) = 4n-3$. Dat vermoeden werd in 2007 door de toen nog student Reiher bewezen. Zijn bewijs is ook eenvoudige combinatoriek. Voor $d \geq 3$ is de situatie een stuk ingewikkelder. Harborth bewees in 1973 dat $f(n,d) \leq (n-1)n^d + 1$. Alon en Dubiner gaven in 1995 een grens die lineair is in n, namelijk $f(n,d) \leq cd(\log d/\log 2)^d n$, met c een constante. Elsholtz gaf in 2004 de ondergrens $f(n,d) \geq (9/8)^{[d/3]} 2^d (n-1)+1$. De bewijzen van de laatste twee grenzen hebben natuurlijk meer voeten in de aarde.

Een generalisatie van de stelling van Erdős-Ginzburg-Ziv in een totaal andere richting is naar de groepentheorie. Olsen bewees in 1976 dat wanneer G een niet noodzakelijk commutatieve groep is van orde n er onder elke rij $(g_1, \ldots, g_{2n-1})$ van elementen uit G een deelrij $(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})$ is met $g_{i_1} \cdots g_{i_n} = e_G$. In het geval dat G een cyclische groep is van orde n geeft dit de stelling van Erdős-Ginzburg-Ziv.

Het doel van een bachelorproject over het bovengenoemde onderwerp is om enkele bewijzen van de bovengenoemde resultaten uit te werken.