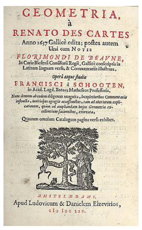
CONGRUENTIEKLASSEN VAN APOLLONIAANSE NETTEN

BEGELEIDER: JAN VONK



Kies een viertal cirkels, paarsgewijs rakend in verschillende punten. Definiëer voor elke cirkel de *kromming* $k := \pm 1/r$, waar r de straal is, en het minteken gekozen wordt als en slechts als de cirkel inwendig aan de drie andere cirkels raakt. De vier krommingen $k_1, \ldots, k_4$ voldoen aan

$$Q(k_1, k_2, k_3, k_4) := 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) - (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 0. \tag{1}$$

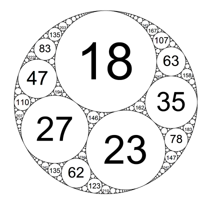
Deze stelling verscheen voor het eerst in een brief van Descartes, verstuurd op 29 november 1643 vanuit Egmond aan den Hoef naar Den Haag, aan prinses Elisabeth van de Palts.

De relatie (1) stelt ons in staat om alle krommingen te bepalen in een *Apolloniaans net*: de limietconfiguratie uitgaande van een initieel viertal, waarbij men recursief voor elk drietal paarsgewijs rakende cirkels de ontbrekende gemeenschappelijke raakcirkels toevoegt. Beginnend met een viertal cirkels met *gehele* kromming, is het eenvoudig te zien uit (1) dat alle krommingen gehele getallen zijn. We spreken dan van een *arithmetisch Apolloniaans net* (AAN).

Krommingen tellen. Neem een arithmetisch Apolloniaans net $\mathscr{A}$, en beschouw de krommingen $k(\mathscr{C})$ van al haar cirkels $\mathscr{C}$. McMullen [6] en Kontorovich–Oh [5] bewijzen dat

$$|\{\mathscr{C} \in \mathscr{A} : k(\mathscr{C}) < X\}| \sim cX^{\delta}, \qquad \delta \approx 1.30568\ldots$$

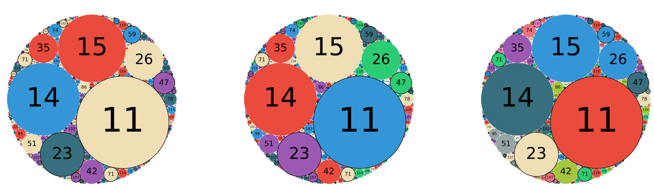
voor een constante $c > 0$. Men zou dus kunnen vermoeden dat elk groot genoeg geheel getal (vaak) voorkomt als een kromming. We zien dadelijk waarom dit niet zo is.



Dit project gaat over de congruentieklassen van krommingen. We stellen de vraag:

Vraag: Wat kan men zeggen over de restklassen modulo $q \geq 1$ van de krommingen in een AAN?

Het Apolloniaans net met initiële krommingen $(-6, 11, 14, 15)$ is *primitief*, i.e. de ggd van de krommingen is 1. We kleuren de cirkels volgens de congruentieklasse van de kromming modulo 5, 7, en 11 respectievelijk. Dit geeft:



Merk op dat elke restklasse voorkomt. In contrast daarmee is het niet moeilijk om te bewijzen dat een kromming in dit voorbeeld nooit congruent is aan 1 modulo 3. Mogelijke doelen van dit project zijn:

(1) De krommingen van een AAN voldoen aan niet-triviale voorwaarden modulo 24, zie [3, 2]. Het *lokaal-globaal vermoeden* stelt dat, gegeven een PAAN, elk groot genoeg geheel getal dat congruent is aan een kromming modulo 24 ook zelf een kromming is. Afgelopen zomer werd dit ontkracht [4] met behulp van een nieuwe invariant gebaseerd op kwadratische en kwartische reciprociteit. Een doel van het project is om de tegenvoorbeelden te begrijpen, en te zoeken naar nieuwe tegenvoorbeelden.

(2) Een van de meest interessante manieren om Apolloniaanse netten te bestuderen is door middel van groepentheorie. Beschouw de Apollogroep $A \leq \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, voortgebracht door de matrices

$$S_1 := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; S_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; S_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; S_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

De groep matrices $m \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ die de kwadratische vorm Q in (1) bewaren, i.e. $Q(m \cdot \mathbf{k}) = Q(\mathbf{k})$ voor elke kolomvector $\mathbf{k}$ in $\mathbb{Z}^4$, noemen we de *orthogonale groep* $\mathrm{O}_Q(\mathbb{Z})$. We hebben dat $A \leq \mathrm{O}_Q(\mathbb{Z})$.

Om de krommingen in een AAN te begrijpen, bestudeert men banen van A op $\mathbb{Z}^4$. De groep $\mathrm{O}_Q(\mathbb{Z})$ is een klassiek object met transitieve werking op primitieve vectoren. De ondergroep $A \leq \mathrm{O}_Q(\mathbb{Z})$ laat zich minder makkelijk vatten. Het is een zogenaamde 'dunne' groep (zie Bourgain–Kontorovich [1]):

- De groep A is 'klein': hij heeft oneindige index in $\mathrm{O}_Q(\mathbb{Z})$.
- De groep A is 'groot': hij is niet bevat in een algebraïsche deelverzameling, i.e. elke polynomiale uitdrukking in de 16 elementen van een matrix die identiek nul is op A, is ook identiek nul op $\mathrm{O}_Q(\mathbb{C})$.

Een tweede mogelijke doel van dit project is om te beschrijven wat voor een gegeven modulus $q \geq 2$ de structuur is van de groep A modulo q, als ondergroep van $\mathrm{O}_Q(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Door beschouwingen van deze soort bewees Fuchs dat behalve de eerder genoemde voorwaarden modulo 24 er geen andere bestaan.

Vereisten: Dit project is voor een vlijtige student met een grondige beheersing van groepentheorie.

References

[1] Bourgain, Kontorovich, *On the local-global conjecture for integral Apollonian gaskets*, Inventiones mathematicae, 196:589–650 (2014).
[2] Fuchs, Sanden, *Some experiments with integral Apollonian circle packings*, Exp. Math., 20(4):380–399 (2011).
[3] Graham, Lagarias, Mallows, Wilks, Yan, *Apollonian Circle Packings: Number Theory*, J. Number Theory, 100(1):1–45 (2003).
[4] Haag, Kertzer, Rickards, Stange, *The Local-Global Conjecture for Apollonian circle packings is false*, arXiv:2307.02749 (2023)
[5] Kontorovich, Oh, *Apollonian circle packings and closed horospheres on hyperbolic 3-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. 24:603-648 (2011)
[6] McMullen, *Hausdorff dimension and conformal dynamics. III. Computation of dimension*, Amer. J. of Math. 120 (4) (1998)