BSc-project: Distributies op $(\frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})^k$

Begeleider: Marco Streng

Hoofddoel van het project: het begrijpen van de *even distributies op* $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2$.

Distributies op $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k$.

Zij k een natuurlijk getal. Een *distributie op* $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k$ is een afbeelding g van $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k$ naar een abelse groep die voldoet aan

$$\sum_{\substack{y\in(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k \\ dy=x}} g(y) = g(x) \tag{1}$$

voor alle positieve gehele getallen d en alle $x \in (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k$.

Distributies voor $k = 1$ spelen een belangrijke rol in de studie van cyclotomische lichamen $\mathbf{Q}(\zeta_N)$ [3] en distributies voor $k = 2$ spelen dezelfde rol voor *modulaire functielichamen* [2].

Voorbeelden

Gegeven $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ schrijven we $\langle x\rangle \in [0, 1)$ voor de kleinste niet-negatieve representant van x. Voorbeelden van distributies voor $k = 1$ and $k = 2$ zijn de afbeeldingen

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R} : x \mapsto \langle x\rangle - \frac{1}{2}$$

en

$$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2 \to \mathbf{R} : (x, y) \mapsto \langle x\rangle^2 - \langle x\rangle + \frac{1}{6}.$$

Algemener, zij $B_k \in \mathbf{Q}[t]$ het k-de Bernouilli-polynoom. Dan is voor elke primitieve vector $v \in \mathbf{Z}^k$ de afbeelding

$$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k \to \mathbf{R} : x \mapsto B_k(\langle v \cdot x\rangle)$$

een distributie.

Beperking tot $(\frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})^k$

Nu is $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ oneindig, dus gaan we het onszelf iets makkelijker maken door slechts naar eindige ondergroepen te kijken. Zij N een positief geheel getal en $\Gamma = (\frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})^k$. Een *distributie op* Γ is een afbeelding van Γ naar een abelse groep die voldoet aan (1) voor alle positieve delers d van N en alle $x \in d\Gamma$. Elke distributie op $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k$ geeft voor elke N een distributie op Γ, dus voorbeelden hebben we al.

Een distributie g heet *even* als daarnaast

$$g(-x) = g(x) \tag{2}$$

geldt voor alle x in het domein.

De universele distributie

We willen alle mogelijke distributies in één object vatten, en dat doen we als volgt. De *universele distributie* op Γ is een distributie h op Γ zo dat er voor elke distributie g op Γ een uniek homomorfisme f bestaat met $g = f \circ h$. Je krijgt deze door de vrije abelse groep op Γ uit te delen naar de ondergroep voortgebracht door de relevante relaties van (1).

Op dezelfde manier is er ook de *universele even distributie* op Γ, op dezelfde manier gedefinieerd met een aantal keer het woord "even" toegevoegd. Dan moet ook naar (2) worden uitgedeeld.

Kubert en Lang geven een eenvoudige en elegante basis voor de universele distributie [2, Theorem I.6.1] en een erg ingewikkelde bijna-basis voor de universele even distributie [1].

Doelen

Doelen van het project zijn het bij elkaar zoeken van theorie die enigszins versnipperd in de literatuur lijkt te staan, en hopelijk een mooiere bijna-basis te vinden voor de universele even distributie voor $k = 2$. Dit is dus een combinatie van literatuuronderzoek en puzzelen.

De toepassing van distributies die ik (net als $[1, 2]$) in gedachten heb (modulaire eenheden) gaat te ver voor dit project, maar een student die Algebra 3 gedaan heeft zou in het project eventueel ook wat meer over cyclotomische lichamen kunnen leren.

Voorkennis

Algebra 1 (vooral abelse groepen, modulorekenen, Chinese reststelling en dergelijke) en Algebra 2 (vooral modulen over hoofdideaaldomeinen).

Referenties

[1] Daniel S. Kubert. A system of free generators for the universal even ordinary $Z_{(2)}$ distribution on Q^{2k}/Z^{2k}. *Math. Ann.*, 224(1):21–31, 1976.

[2] Daniel S. Kubert and Serge Lang. *Modular units*, volume 244 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[3] Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*, volume 83 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.