$\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$

In dit project komen groepentheorie, lineaire algebra, een beetje topologie, en misschien ook wat reële analyse samen. De student die het kiest, zal dus van alle markten thuis moeten zijn.

Wie kennis wil maken met niet-abelse groepen, doet er goed aan eerst te kijken naar $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, de groep van alle reële 2×2-matrices met determinant 1. Deze groep komt men op vele plaatsen in de wiskunde tegen, en Serge Lang heeft er een heel boek over geschreven; het heet "$\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$", het is in 1975 bij Addison-Wesley verschenen, en er is een vertaling in het Russisch uit 1977. Daan Heus heeft $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ bij zijn bachelor-project in 2023 gebruikt om een probleem in de groepentheorie op te lossen. De eigenschappen van deze groep die voor hem van belang waren, gaven aanleiding tot het huidige project.

Laat G een groep zijn. Twee elementen x, $y \in G$ heten *geconjugeerd* als er een element $g \in G$ bestaat met $gxg^{-1} = y$, notatie: $x \sim y$. De relatie $\sim$ is een equivalentierelatie op G, en de bijbehorende equivalentieklassen heten de *conjugatieklassen* van G. Met $G/\sim$ geven we de verzameling conjugatieklassen van G aan. Voor C, $D \in G/\sim$ schrijven we $C \cdot D = \{xy : x \in C,\ y \in D\}$, en $C * D = \{E \in G/\sim\ : E \subset C \cdot D\}$. Het blijkt dat men in plaats van de "bewerking" $*$ te bestuderen, men netzo goed de deelverzameling van $(G/\sim) \times (G/\sim) \times (G/\sim)$ kan onderzoeken die bestaat uit alle tripels (B, C, D) waarvoor de vergelijking $xyz = 1$ een oplossing heeft met $x \in B$, $y \in C$, $z \in D$. Deze deelverzameling is invariant onder alle zes permutaties van B, C en D.

Concreet gaan we in het project G gelijk nemen aan $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. Deze groep heeft een topologie, die geïnduceerd wordt door de natuurlijke inbedding $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^4$. De verzameling $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\sim$ geven we dan de quotiënt-topologie. De eerste vraag is om deze laatste topologische ruimte, die niet Hausdorffs is, concreet te beschrijven. Er is een surjectieve continue afbeelding $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\sim\ \to \mathbf{R}$ die de conjugatieklasse van een matrix $x \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ op het spoor $\mathrm{tr}(x)$ van x afbeeldt, en deze afbeelding is in zekere zin "bijna" injectief.

De volgende vraag is dan om de bewerking $*$ op $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\sim$ precies te beschrijven. Vervangt men ter vereenvoudiging $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\sim$ door $\mathbf{R}$, dan komt men uit op de uiterst concrete vraag voor welke vectoren $(r, s, t) \in \mathbf{R}^3$ er reële 2×2-matrices x, y, z bestaan met de eigenschappen

$$xyz = 1, \quad \det(x) = \det(y) = \det(z) = 1, \quad \mathrm{tr}(x) = r, \quad \mathrm{tr}(y) = s, \quad \mathrm{tr}(z) = t.$$

De verzameling van dergelijke vectoren is invariant onder alle zes permutaties van de drie coördinaten, en kan ongetwijfeld beschreven worden door een eenvoudig stel ongelijkheden.

De student wordt ook aangemoedigd te onderzoeken of er over het voorgestelde onderwerp enige literatuur bestaat.

Begeleider: Hendrik Lenstra