Stevige ringen (II)

Dit is een project dat geschikt is voor een student die plezier heeft in algebra en er ook goed in is. Het vormt een vervolg op een project dat in 2023 door Jeroen Thuijs is uitgevoerd. De oorspronkelijke projectbeschrijving en Jeroens scriptie kan men respectievelijk op

https://pub.math.leidenuniv.nl/~vonkjb/teaching/2023_bachelorseminarium/sr.pdf

en

https://pub.math.leidenuniv.nl/~vonkjb/students/2024_bachelorseminarium/thuijs.pdf

vinden.

Laat R een ring zijn. We geven de additieve groep van R met R^+ aan, en met $\mathrm{End}(R^+)$ de *endomorfismenring* van R^+. Er is een injectief ringhomomorfisme $\lambda\colon R \to \mathrm{End}(R^+)$ dat $r \in R$ afbeeldt op het endomorfisme $x \mapsto rx$ van R^+. (Deze λ is analoog aan de *Cayley-afbeelding* $G \to \mathrm{Sym}(G)$ uit de groepentheorie.) We noemen de ring R *stevig* (Engels: *firm*) als λ surjectief is, met andere woorden als λ een *ringisomorfisme* is. Er blijkt te gelden, zoals Jeroen Thuijs in zijn scriptie bewees, dat R stevig is dan en slechts dan als de ring $\mathrm{End}(R^+)$ commutatief is.

Eenvoudige voorbeelden van stevige ringen krijgt men door naar willekeurige deelringen van het lichaam $\mathbf{Q}$ der rationale getallen te kijken. Jeroen Thuijs heeft ook naar deelringen van K gekeken, waarbij K een lichaamsuitbreiding van $\mathbf{Q}$ is met $[K : \mathbf{Q}] = 2$. Zo'n deelring is steeds stevig, tenzij een speciale voorwaarde vervuld is. Het voornaamste doel van het project bestaat eruit dit resultaat te generaliseren naar het geval $[K : \mathbf{Q}] = n$, waarbij n een willekeurig positief geheel getal is. Hiertoe zal de student zich vertrouwd moeten maken met Galoistheorie en met een aantal fundamentele technieken uit de commutatieve algebra.

Een verwante vraag is de volgende. Stel dat K_0 en K_1 twee eindige lichaamsuitbreidingen van $\mathbf{Q}$ zijn. Is het voor deelringen $R_0 \subset K_0$ en $R_1 \subset K_1$ dan "meestal" zo dat het enige groepshomomorfisme $R_0^+ \to R_1^+$ de nulafbeelding is?

Het is een open vraag of er voor elk kardinaalgetal $\mathbf{n}$ een stevige ring R bestaat met $\#R \geq \mathbf{n}$. Het record is op het ogenblik in handen van Daan van Gent, die een stevige ring geconstrueerd heeft met kardinaliteit $2^{2^{\#\mathbf{Z}}}$. Een student die zijn voorbeeld wil uitwerken, zal de nodige abelse groepentheorie moeten leren.

Begeleider: Hendrik Lenstra