DE ARTIN–HASSE EXPONENTIËLE FUNCTIE

BEGELEIDER: JAN VONK

Zij p een priemgetal, dan definiëren we de *Artin–Hasse* reeks als

$$\mathrm{AH}_p(x) \;=\; \exp\left(x + \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \dots\right) \;\in \mathbf{Q}[\![x]\!].$$

Deze machtreeks heeft een luisterrijke geschiedenis. Ze speelt een centrale rol in de theorie der Witt-vectoren, alsook het bewijs van de rationaliteit van zeta-functies van algebraïsche variëteiten. Een van haar belangrijke eigenschappen is dat de noemers van al haar coëfficienten *niet* deelbaar zijn door p. Met andere woorden, er geldt dat

$$\mathrm{AH}_p(x) \in \mathbf{Z}_p[\![x]\!].$$

We zoeken eerst verschillende manieren om deze eigenschap te bewijzen, van het klassieke bewijs met een productvoorstelling van $\mathrm{AH}_p(x)$, over Dwork's aanpak met de stelling van Dieudonné, tot modernere bewijzen zoals dat van Roberts. Deze verschillende bewijzen zullen ons handige handvaten geven in het verdere project.

Deze machtreeks geeft ons een p-adische functie van x, die we krijgen door waarden van $x \in \mathbf{C}_p$ in te vullen waarvoor de resulterende reeks in $\mathbf{C}_p$ convergeert. Dit is bijvoorbeeld het geval voor waarden van x die dicht genoeg bij nul liggen, gemeten met behulp van de p-adische absolute waarde. We gaan in dit project op zoek naar het maximale gebied van convergentie van de machtreeks $\mathrm{AH}_p(x)$, en haar verzameling nulpunten en andere vezels $\mathrm{AH}_p^{-1}(x) = a$ voor bijzondere waarden van a. Hierover is de literatuur op vele plaatsen eerder beperkt.

In het hoofdstadium van dit project kunnen verschillende richtingen gekozen worden, afhankelijk van de interesse van de student. Twee van de opties zijn:

- Een vermoeden van Conrad stelt dat de coefficiënten van $\mathrm{AH}_p(x)$ uniform verdeeld zijn ten opzicht van de Haar maat op $\mathbf{Z}_p$. Bijvoorbeeld, wanneer $p = 2$ berekenen we

  $$\mathrm{AH}_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{7}{15}x^5 + \frac{16}{45}x^6 + \frac{67}{315}x^7 + \frac{88}{315}x^8 + \frac{617}{2835}x^9 + \frac{2626}{14175}x^{10} + \;\dots$$

  Merk op dat ongeveer de helft van de coëfficiënten even is, een kwart deelbaar door 4, etc. Dit is consistent met de genoemde equidistributie. In dit project gaan we op zoek gaan naar bewijsmateriaal, experimenteel en/of theoretisch, voor dit vermoeden. Een ambitieuze student kan nadenken over een mogelijk bewijs.

- Het geven van een combinatorische interpretatie van de coefficienten van $\mathrm{AH}_p(x)$ als de kans dat een element van de symmetrische groep S_n orde heeft die een macht van p is. Met andere woorden, als P_n de vereniging is van alle Sylow p-groepen in S_n, dan geldt

  $$\mathrm{AH}_p(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{|P_n|}{n!} x^n.$$

  Deze observatie leidt tot enkele concrete gevolgen in de klassieke groepentheorie. Het is mogelijk een Artin–Hasse reeks te definiëren voor andere groepen dan S_n. Het geval van Heisenberg groepen is bijzonder interessant, en slechts weinig beschreven in de literatuur.

Achtergrond. Dit project is voor een energieke student die graag de bizarre wereld van p-adische lichamen en p-adische analyse leert kennen, en daar misschien zelfs al een eerste blootstelling aan gehad heeft.

References

[1] Artin, Hasse *Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der ln-ten Potenzreste im Körper der ln-ten Einheitswurzeln*, Abhandlungen Hamburg, 6: 146–162 (1928)

[2] Conrad, *Artin–Hasse type series and roots of unity*, `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/gradnumthy/AHrootofunity.pdf`(2002).

[3] Dwork, Gerotto, Sullivan, *An introduction to G-functions*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1994).

[4] Robert, *A Course in p-adic Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 198, Springer-Verlag (2000).