Bachelor project: Algebraïsche krommen in $\mathbb{P}^3$

Begeleider: Wim Nijgh (en Ronald van Luijk)

Zij $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ het complexe projectieve vlak. Een algebraïsche kromme in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ van graad d is de projectieve nulpuntsverzameling van een vergelijking $f = 0$, waarbij $f \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ een homogeen polynoom van graad d is.

Een algebraïsche kromme C kunnen we ook interpreteren als een compact tweedimensionaal oppervlak. Het *geslacht* van een dergelijk oppervlak kunnen we informeel beschrijven als de topologische invariant die de 'gaten' in dit oppervlak telt: een bol heeft geslacht 0, een torus geslacht 1, etc. Voor gladde krommen in het projectieve vlak $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ hebben we de volgende geslacht-graad formule.

Lemma: Zij $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ een gladde kromme van graad d, dan is het geslacht $g(C)$ gegeven door de formule

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Uit deze formule leidt men gemakkelijk af dat er bijvoorbeeld geen gladde krommen $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ zijn met $g(C) = 2$. Aangezien krommen in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ altijd door één vergelijking gegeven kunnen worden, en krommen van geslacht 2 wel degelijk bestaan, kan men hieruit afleiden dat er gladde krommen zijn die niet isomorf zijn met een kromme in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Een logische vervolgstap is om te kijken naar krommen in de complexe projectieve ruimte $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Daar kunnen we bijvoorbeeld kijken naar krommen C die gegeven worden door de doorsnede van twee nulpuntverzamelingen. Zij $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X, Y, Z, W]$ twee homogene polynomen van graad respectievelijk d_1 en d_2 die onderling ondeelbaar zijn. Dan definieert de verzameling

$$C := \left\{(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \mid f_1(x, y, z, w) = f_2(x, y, z, w) = 0\right\}$$

een algebraïsche kromme in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Voor dit typen krommen is er ook een geslacht-genus formule.

Lemma: Zij $C \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ een gladde kromme gegeven door de intersectie van de nulpuntsverzamelingen van twee homogene polynomen f_1, f_2 van graad respectievelijk d_1 en d_2. Dan is het geslacht $g(C)$ gegeven door de formule

$$g(C) = 1 + \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot (d_1 + d_2 - 4)}{2}.$$

Met enige moeite kan men uit deze formule afleiden dat we nog steeds geen gladde krommen $C \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ gevonden hebben met $g(C) = 2$. Toch is dit nog niet het gehele verhaal, want er zijn meer krommen in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Sterker nog, indien men een algemene definitie geeft van een algebraïsche kromme over $\mathbb{C}$, kunnen we 'op isomorfie na' gladde krommen altijd beschouwen als een kromme in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.

Stelling: Zij C een gladde kromme over $\mathbb{C}$. Dan bestaat er een kromme C' in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ zodanig dat C' isomorf is met C.

Merk op dat het beeld van dit morfisme dus niet altijd gegeven kan worden door slechts twee vergelijkingen en dat er soms meer vergelijkingen nodig zijn om krommen in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ te definiëren. In deze gevallen laat het geslacht zich niet meer makkelijk vangen door een formule zoals hierboven. Dit laat zien dat de studie van krommen in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ een grotere rijkdom kent dan de studie van krommen in het projectieve vlak $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Doel van het project

Het eerste doel van het project is om de bovenstaande stelling te begrijpen en te bewijzen. Vervolgens zijn er verschillende mogelijkheden voor het vervolg van het project afhankelijk van de interesse van de student. We geven hier alvast enkele suggesties.

(i) In plaats van alleen over het lichaam $\mathbb{C}$ te werken, kunnen we ook algebraïsche krommen definiëren over willekeurige lichamen k. In dit geval geldt de bovenstaande stelling mits k een oneindig lichaam is. Voor eindige lichamen geldt de stelling niet en in dit geval kunnen we een voorbeeld construeren van een gladde kromme in $\mathbb{P}^4_k$ die niet injectief afbeeldt naar $\mathbb{P}^3_k$.

(ii) Zoals we hierboven hebben gezien is niet elke kromme isomorf met een kromme in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, maar door 'dubbele punten' (singulariteiten) toe te laten, kunnen we krommen alsnog 'birationeel' afbeelden naar $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Een vervolg van het project zou kunnen zijn, om deze uitspraak te begrijpen en te bewijzen.

(iii) Elke gladde kromme over $\mathbb{C}$ kunnen we beschouwen als een kromme in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, maar deze 'inbeddingen' kunnen op verschillende manieren worden geconstrueerd. Hierbij kan de *graad* van het beeld van de kromme verschillen. De graad van een kromme C in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ is het aantal snijpunten van C met een generiek hypervlak in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Ter illustratie: voor iedere $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, kunnen we de projectieve lijn $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ inbedden in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ door de afbeelding

$$(x : y) \mapsto (x^d : x^{d-1}y : xy^{d-1} : y).$$

Deze afbeelding geeft een graad d kromme van geslacht 0. Hiermee construeren we voor iedere $d \geq 1$, een kromme in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ van geslacht 0 en graad d. Toch zijn er voor $g > 0$ ook paren (g, d) die niet voorkomen. Wat kunnen we zeggen over de paren (g, d) die voorkomen?

Voorkennis

Algebra 1, 2 en 3 & Algebraic curves.