Eindig-dimensionale roosteralgebra's

Begeleiders: Mark Roelands en Samuel Tiersma

Dit project beoogt de classificatie van rooster-algebra's in eindige dimensie. Een roosteralgebra is een $\mathbb{R}$-algebra voorzien van een ordening die compatibel is met de vermenigvuldiging. We bespreken eerst orde-structuren op $\mathbb{R}$-vectorruimten.

Een *geordende vectorruimte* $(V, \preceq)$ is een reële vectorruimte V voorzien van een partiële ordening $\preceq$ zodat voor alle $x, y \in V$ met $x \preceq y$ geldt

(i) $x + z \preceq y + z$ voor alle $z \in V$;
(ii) $\alpha x \preceq \alpha y$ voor alle $\alpha \geq 0$.

De ordening $\preceq$ ligt wegens eis (i) vast door de *kegel van positieve elementen* $V_+ = \{x \in V : x \succeq 0\}$. We noemen $(V, \preceq)$ een *vectorrooster* indien ieder tweetal elementen $x, y \in V$ een supremum $x \vee y$ en een infimum $x \wedge y$ heeft.

Voorbeeld. Zij X een topologische ruimte, en $C(X) = \{f\colon X \to \mathbb{R} \text{ continu}\}$. Definieer op $C(X)$ een partiële ordening $\preceq$ door

$$f \preceq g \iff f(x) \leq g(x) \text{ voor alle } x \in X.$$

Dit maakt $(C(X), \preceq)$ tot een vectorrooster met puntgewijze roosteroperaties:

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ en } (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

De *absolute waarde* van een element x in een vectorrooster V is gedefinieerd als $|x| = x \vee (-x)$. Twee elementen $x, y \in V$ heten *disjunct* als $|x| \wedge |y| = 0$; disjunctie noteren we door $x \perp y$.

Definitie. Een *roosteralgebra* is een vectorrooster E dat tevens een $\mathbb{R}$-algebra is voor een vermenigvuldiging zodat $xy \in E_+$ voor alle $x, y \in E_+$. Een roosteralgebra heet een *f-algebra* als voor elke $z \in E$ geldt: $x \perp y$ impliceert $zx \perp y$ en $xz \perp y$.

Voorbeeld (vervolg)**.** Voor $f, g \in C(X)$ geldt $f \perp g$ dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ geldt $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$. Hieruit volgt dat het vectorrooster $C(X)$ een f-algebra is onder de puntgewijze vermenigvuldiging gegeven door $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Een vectorrooster V heet *archimedisch* indien voor alle $x, y \in V$ geldt:

$$nx \leq y \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \implies x \leq 0.$$

Het eerste deel van het project is de volgende commutativiteitsstelling bewijzen.

Stelling (Amemiya–Birkhoff–Pierce)**.** *Elke archimedische f-algebra is commutatief.*

Een archimedische f-algebra E (met eenheid) van eindige dimensie d is isomorf aan $\mathbb{R}^d$ (met coördinaatsgewijze vermenigvuldiging en ordening). Van niet-archimedische f-algebra's van eindige dimensie bestaan echter vele interessante voorbeelden. Het tweede, en aanzienlijk ambitieuzere deel, behelst deze structuren verder uitwerken en begrijpen.

De classificatie van eindige-dimensionale vectorroosters in [Wor19] zal dienen als ons vertrekpunt. Ook het tensorproduct $E \otimes F$ van twee vectorroosters E en F (cf. [Wor19, §4]) zal mogelijk nuttig blijken.

Voorkennis: Algebra II.

Referenties

[AB06] Charalambos D. Aliprantis and Owen Burkinshaw. *Positive operators*. Springer, Dordrecht, 2006. Reprint of the 1985 original.

[Wor19] Marten Wortel. Lexicographic cones and the ordered projective tensor product. In *Positivity and noncommutative analysis*, Trends Math., pages 601–609. Birkhäuser/Springer, Cham, 2019.