Injective ring maps

David Holmes

January 10, 2025

The notion of injectivity for ring maps is too weak for many purposes. For a simple (if not particularly exciting) example, if $f : X \to Y$ is a map of topological spaces such that the pullback map on rings functions is injective, this implies that the image of f is dense, but f need not be surjective.

There are various standard strengthenings of the motion of injectivity; for example, one might ask for split injectivity, or faithful flatness, or *universal injectivity*:

A map $f\colon R \to S$ of commutative rings is *universally injective* if for every R-module M the map of R-modules

$$M = M \otimes_R R \to M \otimes_R S \tag{1}$$

is injective.

This is a much stronger condition than being injective! For example, consider the natural map $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. After tensoring over $\mathbb{Z}$ with $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ for n a non-zero, non-unit element, we find that the map is not injective. Hence this map is very far from being universally injective.

On the other hand, the diagonal map $R \to R \times R$ is universally injective, as is any split injection, as are maps extracting roots (for example if $r \in R$ then the natural map

$$R \to R[x]/(x^2 - r) \tag{2}$$

Is universally injective). More generally, any faithfully flat ring map is universally injective; but again, this is not all, for example if M is an R-module then we can make a ring structure on $R \oplus M$ by setting every element of M to square to 0; then $R \to R \oplus M$ is universally injective, but is faithfully flat if and only if M is flat (indeed, these are split injections).

In this project I want to explore these various notions of injectivity (perhaps especially universal injectivity) for maps of *monoid rings*. If $P \to Q$ is a map of monoids (e.g. a map of cones in a real vector space) and Λ is any ring, then there is an induced map of Λ-algebras $\Lambda[P] \to \Lambda[Q]$. Can we give necessary or sufficient conditions on $P \to Q$ for this map to be universally injective?

Nederlands

Het idee van injectiviteit voor ringhomomorfismen is te zwak voor veel doeleinden.

Neem een eenvoudig (maar niet bijzonder spannend) voorbeeld: als $f : X \to Y$ een afbeelding van topologische ruimten is, zodat de pullback-afbeelding op de ringen van functies injectief is, dan impliceert dit dat het beeld van f dicht is, maar f hoeft niet surjectief te zijn.

Er zijn verschillende standaardversterkingen van het concept injectiviteit; men kan bijvoorbeeld vragen om gesplitste injectiviteit, trouw vlakheid of *universele injectiviteit*:

Een afbeelding $f\colon R \to S$ van commutatieve ringen is *universeel injectief* als voor elke R-module M de afbeelding van R-modules

$$M = M \otimes_R R \to M \otimes_R S$$

injectief is.

Dit is een veel sterkere voorwaarde dan gewone injectiviteit! Neem bijvoorbeeld de natuurlijke afbeelding $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Na tensoren over $\mathbb{Z}$ met $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, waarbij n een niet-nul en niet-inverteerbaar element is, blijkt dat de afbeelding niet injectief is. Daarom is deze afbeelding verre van universeel injectief.

Aan de andere kant is de diagonaalafbeelding $R \to R \times R$ universeel injectief, evenals elke gesplitste injectie en afbeeldingen die wortels extraheren (bijvoorbeeld als $r \in R$, dan is de natuurlijke afbeelding

$$R \to R[x]/(x^2 - r)$$

universeel injectief). Meer in het algemeen is elke trouw vlakke ringhomomorfisme universeel injectief; maar dat is niet alles. Bijvoorbeeld, als M een R-module is, dan kunnen we een ringstructuur definiëren op $R \oplus M$ door elk element van M tot 0 in het kwadraat te stellen. Dan is $R \to R \oplus M$ universeel injectief, maar trouw vlak als en slechts als M vlak is (dit zijn immers gesplitste injecties).

In dit project wil ik deze verschillende concepten van injectiviteit (vooral universele injectiviteit) onderzoeken voor afbeeldingen van *monoïde-ringen*. Als $P \to Q$ een afbeelding van monoïden is (bijvoorbeeld een afbeelding van kegelpunten in een reële vectorruimte) en Λ een ring, dan is er een geïnduceerde afbeelding van Λ-algebra's $\Lambda[P] \to \Lambda[Q]$. Kunnen we noodzakelijke of voldoende voorwaarden geven op $P \to Q$ zodat deze afbeelding universeel injectief is?