

BACHELORPROJECT AFFIENE ALGEBRAÏSCHE GROEPEN

VICTOR DE VRIES (EN RONALD VAN LUIJK)

Zij k een algebraïsch afgesloten lichaam. Een *affiene variëteit* is een deelverzameling V van k^n , waarvoor er polynomen $P_1, \dots, P_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ bestaan, zodat V gelijk is aan hun gedeelde nulpuntenverzameling $V(P_1, \dots, P_m) := \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid P_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ voor } 1 \leq i \leq m\}$.

Een interessante klasse van affiene variëteiten zijn de zogeheten *affiene algebraïsche groepen*. Een affiene algebraïsche groep G is een affiene variëteit met morfismen (afbeeldingen gegeven door ratio's van polynomen) $m : G \times G \rightarrow G$, $\text{inv} : G \rightarrow G$ en een neutraal element $e \in G$, die G de structuur van een groep geven.

Voorbeeld 1. Een simpel voorbeeld van een affiene algebraïsche groep is de *additieve groep* $\mathbb{G}_a$. De onderliggende variëteit is het lichaam k zelf, de vermenigvuldiging is $k \times k \rightarrow k$ $(x, y) \mapsto x + y$, de inverteerafbeelding is $x \mapsto -x$ en het neutrale element is 0.

Voorbeeld 2. Een ander voorbeeld is de *algemene lineaire groep* GL_n . Als wij k^{n^2} identificeren met $\text{Mat}_n(k)$, dan is de verzameling van GL_n gegeven door $\text{Mat}_n(k) \setminus \{m \in \text{Mat}_n(k) \mid \det(m) = 0\}$. Dit is een algebraïsche variëteit ook al lijkt dat op het eerste oog niet zo. Namelijk beschouw de nulpuntenverzameling H van $k^{n^2} \times k$, gegeven door $H := \{(m, t) \mid \det(m) \cdot t = 1\}$. De projectie $(m, t) \mapsto m$ geeft een isomorfisme van H met GL_n . De vermenigvuldiging op GL_n is de gebruikelijke matrixvermenigvuldiging $(m, n) \mapsto m \cdot n$, de inverteerafbeelding is $m \mapsto m^{-1} = \frac{1}{\det(m)} m^{\text{ad}}$ en het identiteits-element is de identiteitsmatrix.

Het is niet zo moeilijk om in te zien dat elke algebraïsche subgroep van GL_n affien is. Wat bijzonderder is, is dat het omgekeerde waar is.

Stelling 3. *Zij G een affiene algebraïsche groep. Er bestaat een $n > 0$ en een inbedding van algebraïsche groepen $G \hookrightarrow \text{GL}_n$.*

Dus elke affiene algebraïsche groep is een matrixgroep. Dit is te zien als een analoog van de stelling van Cayley, die zegt dat elke eindige groep een permutatiegroep is.

Het is vaak interessanter om te werken over een lichaam $F \subset k$ dat niet per se algebraïsch afgesloten is. Dit kan gedaan worden door het kiezen van een F -structuur $\mathcal{V}$ op een affiene variëteit V . Het kiezen van zo een F -structuur $\mathcal{V}$ komt neer op het kiezen van polynomen $P_1, \dots, P_r \in F[X_1, \dots, X_n]$, zodat de V isomorf is met de k -nulpuntenverzameling $V(P_1, \dots, P_r)$. Het is belangrijk om de F -polynomen te onthouden (of beter gezegd, het ideaal in $F[x_1, \dots, x_n]$ dat zij voortbrengen), omdat we hierdoor kunnen praten over F -punten $\mathcal{V}(F)$ op $\mathcal{V}$, wat simpelweg oplossingen in F^l zijn van het stelsel $P_1 = \dots = P_r = 0$.

Voorbeeld 4. Laat $V \subset k^n$ een affiene variëteit zijn, zodat $I(V)$ voortgebracht is door polynomen $f_1, \dots, f_r$ met coëfficiënten in F . Dan is induceren de polynomen $f_1, \dots, f_r$ een F -structuur op V , aangezien de coëfficiënten van deze polynomen al in F liggen.

Een F -groep is grofweg gezegd een affiene algebraïsche groep G met een F -structuur $\mathcal{G}$, die ‘compatibel is’ met de groepsstructuur m, inv, e . De vereiste compatibiliteit is grofweg gezegd dat de afbeeldingen m, inv gegeven zijn door F -polynomen en dat het neutrale punt e een F -punt is op $\mathcal{G}$.

Voorbeeld 5. Laten wij als voorbeeld $F = \mathbb{R}$, $k = \mathbb{C}$ en $G = \mathbb{G}_m := \mathbb{C}^* \cong V(x_1 x_2 - 1) \subset \mathbb{C}^2$ nemen. We hebben een canonieke $\mathbb{R}$ -structuur op $\mathbb{G}_m$, genaamd $\mathbb{G}_{m, \mathbb{R}}$, die gegeven is door het $\mathbb{R}$ -polynoom $x_1 x_2 - 1$. Echter is er ook een andere $\mathbb{R}$ -structuur gegeven door het polynoom $x_1^2 + x_2^2 - 1$. Dit volgt uit dat de afbeelding

$$\mathbb{C}^* \rightarrow V(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad t \mapsto \left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{i}{2}\left(-t + \frac{1}{t}\right)\right) \quad (1)$$

een isomorfisme is. De variëteit $V(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ wordt onder de vermenigvuldiging

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \mapsto (x_1 x_2 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

een algebraïsche groep en samen met $x_1^2 + x_2^2 - 1 \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ is dit een $\mathbb{R}$ -groep $\mathcal{N}$. De onderliggende algebraïsche groepen van $\mathbb{G}_{m, \mathbb{R}}$ en $\mathcal{N}$ zijn isomorf onder het isomorfisme (1), echter zijn $\mathbb{G}_{m, \mathbb{R}}$ en $\mathcal{N}$ niet isomorf als $\mathbb{R}$ -groepen. De intuïtie hiervoor is dat dit isomorfisme een $i \notin \mathbb{R}$ nodig heeft. Voor de verzamelingen $\mathbb{R}$ -punten vinden wij $\mathbb{G}_{m, \mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ en $\mathcal{N}(\mathbb{R}) = S^1 \subset \mathbb{R}^2$, de cirkelgroep.

Wat wij in dit voorbeeld zagen was een niet triviale *twist* $\mathcal{N}$ van $\mathbb{G}_{m, \mathbb{R}}$, een commutatieve $\mathbb{R}$ -groep. Een interessant en lastig vraagstuk voor dit project is: Hoe kunnen wij een willekeurige commutatieve F -groep beschrijven?

DOELEN VAN HET PROJECT

- Een eerste doel voor de student is om zich bekend te maken met algebraïsche groepen en F -groepen. Een goede referentie is hoofdstuk 1 en 2 uit [2]. Belangrijk is in het bijzonder het begrijpen aan de hand van voorbeelden. Er zal aardig wat voorkennis over ringen nodig zijn. Het is mogelijk om dit te leren aan het begin als de student er nog niet erg bekend mee is, maar enige voorkennis over ringen is wel nodig.
- Een volgend doel is het bewijzen dat elke affiene F -groep een sub F -groep is van GL_n (waarbij GL_n zijn canonieke F -groep structuur heeft).
- Een mogelijk verder doel is het onderzoeken welke commutatieve F -groepen er zijn. Dit kan eerst over een algebraïsch afgesloten lichaam worden gedaan en daarna aan de hand van eenvoudige F -groepen. Voor het algemene verhaal is er Galois-cohomologie nodig, wat redelijk ingewikkeld is maar wel erg mooi.

REFERENTIES

- [1] J.S. Milne. *Algebraic Groups: The Theory of Group Schemes of Finite Type over a Field*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2017.
- [2] T.A. Springer. *Linear Algebraic Groups*. Progress in mathematics. Springer, 1998.