

Invarianten berekenen met Gröbnerbases

Bachelorproject, Leiden

Ronald van Luijk

Zij k een lichaam, n een positief geheel getal en $R = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ de polynoomring in de n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$. Een Gröbnerbasis voor een ideaal $I \subset R$ is een rij voortbrengers voor I die aan een stel voorwaarden voldoet die het makkelijk maken om te checken of een polynoom $f \in R$ bevat is in I . Deze Gröbnerbases spelen een belangrijke rol bij veel berekeningen over idealen. Deze Gröbnerbases zijn behandeld in het vak Algorithms in Algebra.

In dit project gaan we zien hoe we Gröbnerbases kunnen gebruiken om alle invarianten te berekenen onder de lineaire werking van eindige groepen op R .

Als voorbeeld kijken we naar de symmetrische groep S_n die op R werkt door de indices van de variabelen te permuteren. In Algebra 2 heb je waarschijnlijk gezien dat de elementair symmetrische polynomen

$$\sigma_r = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$$

met $1 \leq r \leq n$ de ring R^{S_n} van invarianten voortbrengen als k -algebra. (Merk op dat $\sigma_1 = x_1 + \dots + x_n$ en $\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$.) Het bewijs dat hiervoor gegeven werd maakt gebruik van de lexicografische ordening op de monomen in R .

In dit project geven we een algoritme dat Gröbnerbases gebruikt om een symmetrisch polynoom f uit te drukken in de elementair symmetrische polynomen. Een zorgvuldige analyse laat zien dat Gröbnerbases voor dit voorbeeld S_n niet echt nodig zijn, maar we zullen dit ook generaliseren naar het bepalen van voortbrengers voor de k -algebra R^G van invarianten onder de lineaire werking van een willekeurige eindige groep G .

We beginnen het project met hoofdstuk 7 van het boek [CLOS].

Referenties

[CLOS] D. Cox, J. Little, Donal O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms, An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, fourth edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2018.