

DE HOMOLOGIE VAN $SL_3(\mathbb{Z})$

BEGELEIDER: JAN VONK

Een flink deel van de hedendaagse getaltheorie vindt plaats binnen het zogenaamde *Langlands programma*, dat diepe verbanden voorspelt tussen groepentheorie en getaltheorie. Dit experimentele project gaat over een belangrijk ingrediënt daarvan, namelijk de homologie van arithmetische groepen G , waar we ons toespitsen op het geval

$$G = SL_3(\mathbb{Z}).$$

Deze groep vormt een belangrijk voorbeeld waar onze kennis over het Langlands programma, en in het bijzonder de torsie in homologie, ondanks vele inspanningen in het laatste decennium, zeer beperkt blijft.

Voorbeeld. Om het project te duiden is het goed om eerst de groep $G = SL_2(\mathbb{Z}[i])$ te bespreken. Voor elk element $a \in \mathbb{Z}[i]$ definiëren we de ondergroep $\Gamma_0(a) \leq G$ van matrices die bovendriehoeks zijn modulo a . De berekeningen van Sengun [4] en Karayalcin [3] rekenen honderden van deze groepen uit, en vinden bijvoorbeeld dat

a	$\Gamma_0(a)^{\text{ab}}$
1	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
$4 + i$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}$
$10 + 7i$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$
$15 + 2i$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3^3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/19^2\mathbb{Z}$
$25 + 4i$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2^7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/223\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/317\mathbb{Z}$

waarbij we zoals gewoonlijk voor elke groep A de notatie $A^{\text{ab}} := A/[A, A]$ gebruiken voor de verabelsing van A . Opmerkelijk hier zijn twee fenomenen, die we op basis van deze tabel bespeuren:

- hoewel $\Gamma_0(a)$ steeds oneindig is, is de verabelsing $\Gamma_0(a)^{\text{ab}}$ eindig in al deze voorbeelden.
- de orde van de verabelsing $\Gamma_0(a)^{\text{ab}}$ groeit zeer snel.

Voor een groep A heeft de verabelsing A^{ab} een interpretatie als de zogenaamde *eerste homologiegroep* $H_1(A, \mathbb{Z})$. Deze interpretatie leent zich tot veralgemening door de theorie van groepenhomologie. Op basis van data zoals de bovenstaande tabel, onderzochten Bergeron en Venkatesh [1] de groei van de torsie in zulke homologiegroepen, en kwamen met het vermoeden dat deze exponentieel groeit. Voor het geval $G = SL_2(\mathbb{Z}[i])$ zijn er inmiddels vele instanties van dit vermoeden bewezen in het afgelopen decennia, en is onze kennis sterk toegenomen.

Het project. De groep $G = SL_3(\mathbb{Z})$, en haar ondergroepen van eindige index, zijn het onderwerp van dit project. De student zal expliciete berekeningen maken van de homologiegroepen

$$H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \quad \text{en} \quad H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$$

voor een groot aantal ondergroepen $\Gamma \leq SL_3(\mathbb{Z})$ van eindige index, en zal hiermee data produceren analoog aan bovenstaande tabel. De student zal zich eerst vertrouwd maken met de voornaamste definities van groepenhomologie, en zal gebruik maken van software zoals Sage om expliciete voorbeelden uit te rekenen, aan de hand van zelf ontworpen algoritmen. Aan de hand van de verkregen data zal de student ook eigen vermoedens formuleren, bvb. over de eindigheid/rang van de homologiegroepen, en over de het gedrag van haar torsie.

Achtergrond. Dit project is voor een energieke student die vertrouwd is met de inhoud van Algebra I, II en III. Vaardigheden met software zoals Sage is niet vereist, maar een enthousiasme om die te verwerven is wel vereist.

REFERENCES

- [1] BERGERON, VENKATESH *The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups*, J. Inst. Math. Jussieu 12(2):391–447 (2013).
- [2] GUNNELLS, MCCONNELL, YASAKI *On the growth of torsion in the cohomology of arithmetic groups*, J. Inst. Math. Jussieu 19(2):537–569 (2020).
- [3] KARAYALCIN *Torsion in the homology of Bianchi groups and Galois representations*, Leiden Master thesis, hdl.handle.net/1887/4180694 (2025).
- [4] SENGÜN *On the Integral Cohomology of Bianchi Groups*, Experimental Mathematics, 20(4):487–505 (2011).