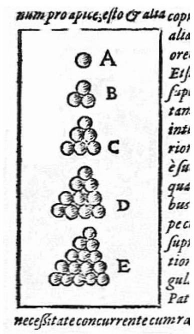
HET VERMOEDEN VAN KEPLER IN 24 DIMENSIES

BEGELEIDER: JAN VONK



Om te achterhalen hoe men zo efficiënt mogelijk kanonskogels kan stapelen op het scheepsdek van een krijgsschip, bestudeerde Johannes Kepler in 1611 het probleem van optimale bolstapelingen. Bovenop een laag kanonskogels in een zeshoekig patroon (zie tekening), beschrijft Kepler hoe de volgende laag gelijkaardig kan toegevoegd worden, door eerst een kanonskogel te leggen die zo diep mogelijk in de vorige laag past. Dit kan steeds op twee verschillende manieren, en leidt tot een overaftelbaar aantal mogelijke stapelingen, die steeds de beschikbare ruimte voor

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 74.048\ldots\ \%$$

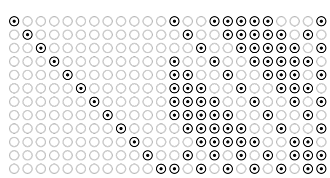
opvullen. Het vermoeden van Kepler zegt dat dit *optimaal* is.

Algemeen definiëren we een *bolstapeling* van dimensie n als een aftelbaar oneindige verzameling gesloten bollen B_i met straal 1 in $\mathbb{R}^n$ die 'niet overlappen' in de zin dat hun inwendige verzamelingen paarsgewijs disjunct zijn. Zij X_t een bol met middelpunt in de oorsprong straal t, dan definiëren we de *dichtheid* η van de bolstapeling

$$\eta := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mathrm{Vol}(X_t)} \sum \mathrm{Vol}(X_t \cap B_i)$$

wanneer deze limiet bestaat. Een bolstapeling is *optimaal* als de dichtheid niet kleiner is dan die van alle bolstapeling van dezelfde dimensie. Tot op heden blijft het een open probleem om voor elke n een optimale bolstapeling te bepalen, doch recent werd dit opgelost in dimensies 8 en 24. In dit project kijken we naar het grootste bekende geval, construeren we de optimale bolstapeling van dimensie 24, en bestuderen we de ongerepte rijkdom van haar symmetrieën. Deze is nauw verwant met een van de mooiste structuren die de wiskunde rijk is: Het *Leech rooster*.

- Ons verhaal begint met de *Golay code*. Dit is een heel bijzondere 12-dimensionale deelruimte van $\mathbb{F}_2^{24}$ die in 1949 werd ontdekt. Ze wordt voortgebracht door 12 vectoren wiens coördinaten in de volgende afbeelding visueel weergegeven worden. Deze deelruimte bevat relatief veel vectoren, die paarsgewijs toch op relatief



  veel coördinaten van elkaar verschillen, hetgeen haar erg nuttig maakt voor praktische toepassingen.
- Met behulp van de Golay code ontdekte Leech een heel bijzonder 24-dimensionaal *rooster* (dat wil zeggen, een discrete deelgroep van $\mathbb{R}^{24}$ isomorf met $\mathbb{Z}^{24}$). Dit geeft een bolstapeling in $\mathbb{R}^{24}$ van hoge dichtheid waarin elke bol raakt aan 196560 andere. We bestuderen alle symmetrieën, en ontdekken zo de befaamde *Conway groep* Co_1. We bewijzen dat het een enkelvoudige groep is van orde maar liefst

$$|\mathrm{Co}_1| = 4\,157\,776\,806\,543\,360\,000.$$

Vereisten: Groepentheorie. Ook lineaire algebra, en een gezonde portie nieuwsgierigheid.

References

[1] Conway and Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer, 1999.
[2] Quanta Magazine, *Nieuwsbericht*, https://www.quantamagazine.org/sphere-packing-solved-in-higher-dimensions-20160330/
[3] Wilson, *The Finite Simple Groups*, Springer, 2009.