

DE INDEX STELLING VOOR TOEPLITZ OPERATOREN

BRAM MESLAND

Beschouw de Hilbertruimte $L^2(S^1)$ van kwadratisch integreerbare functies op de cirkel, ten opzichte van de Lebesgue maat gegeven door booglengte. Deze Hilbertruimte is unitair isomorf aan de Hilbertruimte $\ell^2(\mathbb{Z})$ via de *discrete Fourier transformatie*

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(S^1), \quad (\mathcal{F}\phi)(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n e^{-in \cdot z}.$$

De *Hardy-ruimte* $H^2(S^1)$ is gedefiniëerd als beeld $\mathcal{F}(\ell^2(\mathbb{N})) \subset L^2(S^1)$ van de deelruimte $\ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$. Dus bestaat $H^2(S^1)$ uit functies van welke slechts de positieve Fourier coëfficiënten ongelijk nul zijn, ofwel uit die L^2 -functies op S^1 die holomorf uitbreiden naar de gesloten schijf in het complexe vlak. We schrijven $P : L^2(S^1) \rightarrow H^2(S^1)$ voor de orthogonale projectie afbeelding.

Voor iedere functie $f \in C(S^1)$ verkrijgen we een operator $M_f \in B(L^2(S^1))$ via punts-gewijze vermenigvuldiging. De *Toeplitz operator* $T_f \in B(H^2(S^1))$ is gedefiniëerd via compressie met de projectie P :

$$T_f(g) = P(fg), \quad g \in H^2(S^1).$$

Een operator $F \in B(H)$ heet een *Fredholm operator* als het beeld van F gesloten is en zowel $\ker F$ als $\ker F^*$ eindige dimensie hebben. De *Fredholm index* is geheel getal

$$\text{Ind}(F) = \dim \ker F - \dim \ker F^* \in \mathbb{Z}.$$

De Fredholm index heeft de robuuste eigenschap dat ze constant blijft langs continue paden van Fredholm operatoren. Als zodanig is het een homotopie invariant. In het geval van de Toeplitz operatoren T_f is precies bekend wanneer deze Fredholm zijn en wat de index is:

Stelling 1 (Noether–Gohberg–Krein index stelling). *Zij $f \in C(S^1)$ een functie zodanig dat $f(z) \neq 0$ voor alle $z \in S^1$. Dan is de operator T_f Fredholm met Fredholm index*

$$\text{Ind}(T_f) = -w(f),$$

waar $w(f)$ het windingsgetal van de functie f is. Als f een C^1 -functie is dan kan het windingsgetal worden berekend door de formule $w(f) = \int_{S^1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

Deze stelling kan worden beschouwd als een eerste incarnatie van de gevierde Atiyah–Singer index stelling en legt een diep verband tussen analyse, topologie en meetkunde. Deze laatste stelling bevat bijvoorbeeld de stelling van Gauss–Bonnet en die van Riemann–Roch als speciale gevallen. In dit project zullen we een bewijs uitwerken van stelling 1 en kijken naar verschillende toepassingen. Die kunnen liggen in de analyse, de meetkunde, de topologie of de fysica.

Voorkennis: algebra, lineaire algebra, topologie, linear analysis, complex analysis. Eventueel ook differentiable manifolds.

E-mail address: b.mesland@math.leidenuniv.nl