Het probleem van Julian

Dit project gaat over eindige abelse groepen, en het is enigszins combinatorisch van aard. Het is geschikt voor een student die houdt van problemen waaraan gepuzzeld moet worden, in de zin dat het niet van te voren duidelijk is welke methoden het best zullen werken. Het ziet ernaar uit dat men, behalve van gezond verstand, goed gebruik kan maken van karakters van eindige abelse groepen, van een aantal elementaire afschattingen uit de getaltheorie, en mogelijkerwijze ook van enig programmeerwerk. Kennis van Algebra 1, 2 en 3 moet voor het grootste deel van het project voldoende zijn.

Julian Lyczak, die in oktober 2019 in Leiden gepromoveerd is, beweerde in een bij zijn proefschrift gevoegde stelling het volgende. Stel dat p een priemgetal is, en X is een deelverzameling van $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ met de eigenschap dat er een *bijectieve* functie $\binom{X}{2} \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ is die $\{x, y\}$ op $x + y$ afbeeldt, waarbij $\binom{X}{2} = \{Y \subset X : \#Y = 2\}$. Dan geldt $p = 11$, en X is een nevenklasse van de unieke ondergroep van $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*$ die orde 5 heeft.

Van de stelling van Julian zijn inmiddels verschillende bewijzen beschikbaar. De student zal zich met die bewijzen vertrouwd moeten maken, met als doel een aantal algemenere stellingen van hetzelfde type te bewijzen. In het bijzonder kan naar de volgende problemen gekeken worden.

(1) Bepaal alle paren (p, X), waarbij p een priemgetal is en $X \subset \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ de eigenschap heeft dat er een bijectie $\binom{X}{2} \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ is die $\{x, y\}$ op $x+y$ afbeeldt. Dit zou met dezelfde methoden gedaan moeten kunnen worden.

(2) Bepaal algemener, op isomorfie na, alle paren (A, X), waarbij A een eindige abelse groep is (die we hier additief noteren) en $X \subset A$ de eigenschap heeft dat er een bijectie $\binom{X}{2} \to A \backslash \{0\}$ is die $\{x, y\}$ op $x + y$ afbeeldt. Dit belooft wat meer werk te worden.

(3) Bepaal alle paren (n, X), waarbij n een positief geheel getal is en $X \subset \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de eigenschap heeft dat er een bijectie $\binom{X}{2} \to (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ is die $\{x, y\}$ op $x + y$ afbeeldt. Dit zou een doenlijk probleem moeten zijn, maar het is waarschijnlijk wat ingewikkelder dan de eerste twee.

Natuurlijk staat het de student vrij zelf ook generalisaties te formuleren en te onderzoeken. In het derde probleem kan men bijvoorbeeld ook naar andere eindige ringen dan $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ kijken, en varianten met modulen over zulke ringen zijn eveneens denkbaar.

Begeleider: Hendrik Lenstra