Een massaformule voor abelse groepen

Dit onderwerp is geschikt voor iemand die van algebra houdt. Het vormt een vervolg op een project dat in 2011 door D. W. Gonzalez Arroyo onder leiding van Bart de Smit is uitgevoerd. Zie

http://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/proj/massa.pdf

voor de oorspronkelijke projectbeschrijving, en

https://www.universiteitleiden.nl/binaries/content/assets/science/mi/scripties/arroyobach.pdf

voor de scriptie. Eén van de oorspronkelijk voorgestelde onderwerpen was om voor een priemgetal p en een niet-negatief geheel getal n de formule

$$\sum_{\# G = p^n} \frac{1}{\# \operatorname{Aut} G} = \frac{p^{n(n-1)}}{\prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)}$$

te bewijzen, waarbij G loopt over alle abelse groepen van orde p^n op isomorfie na. Daar is het indertijd echter niet van gekomen, en het voornaamste doel van het project is, het nu wel te doen.

Eén mogelijkheid is om oudere bewijzen van de formule te bestuderen, zoals die gegeven worden in artikelen van P. Hall (*A partition formula connected with abelian groups*, Comm. Math. Helv. **11** (1938-39), 126–129) en H. Cohen en H. W. Lenstra (*Heuristics on class groups of number fields*, pp. 33–62 in: Number Theory Noordwijkerhout 1983, Springer-Verlag, 1984). Aantrekkelijker is het om rechtstreeks de volgende equivalente bewering te bewijzen: met p en n als boven, is het aantal abelse groepsstructuren op een vaste verzameling van p^n elementen gelijk aan

$$\frac{p^n! \cdot p^{n(n-1)}}{\prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)}.$$

Dit zou moeten lukken door de methoden uit de genoemde scriptie aan te passen. Het zou in het bijzonder interessant zijn een *bijectief bewijs* van de net genoemde formule te geven, d.w.z. een expliciete bijectie aan te geven tussen de verzameling abelse groepsstructuren op $\{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$ en een verzameling waarvan het aantal elementen om triviale redenen door dezelfde formule gegeven wordt.

Afhankelijk van de voortgang van het project en de interesse van de student, kan deze ook kijken naar generalisaties, waarbij de abelse groepen vervangen worden door modulen over ringen die aan geschikte voorwaarden voldoen. Hierover bestaan artikelen van C. Greither (*Galois–Cohen–Lenstra heuristics*, MR1800220) uit 2000 en van C. Wittmann (*Cohen–Lenstra sums over local rings*, MR2144968) uit 2004.

Begeleider: H. W. Lenstra.