MONOID METRICSCHE RUIMTES

DAVID HOLMES

Herhalen:

Definition 0.1. Zei S een verzameling. Een functie $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ is een *metric* als:

(1) $\forall s, t, u \in S$ hebben we $d(s,t) + d(t,u) \geq d(s,u)$;
(2) $\forall s, t \in S$ hebben we $(d(s,t) = 0 \iff s = t)$.

Het doel van deze project is $\mathbb{R}_{\geq 0}$ te vervangen met iets algemener, namelijk een *monoid*.

Definition 0.2. Een *monoid* is een tuple $(M, 0, +)$ met M een verzameling, $+\colon M \times M \to M$, $0 \in M$, zodra dat voor alle $x, y, z \in M$ hebben we

(1) $x + y = y + x$
(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
(3) $x + 0 = x$.

De *eenheiden* zijn de elementen $x \in M$ zodra dat er bestaat $y \in M$ met $x+y = 0$; M is *sharp* als 0 de enige eenheid is.

M is *integral* als $x + y = z + y \implies x = z$.

Zei M integral en $x, y \in M$; we zeggen $x \leq y$ als er bestaat $z \in M$ met $x+z = y$.

Definition 0.3. Laat M een sharp integral monoid en S een verzameling. Een M*-metric* op S is een functie $d\colon S \times S \to M$ zodra dat:

(1) $\forall s, t, u \in S$ hebben we $d(s,t) + d(t,u) \geq d(s,u)$;
(2) $\forall s, t \in S$ hebben we $(d(s,t) = 0 \iff s = t)$.

Voorbeelden:

(1) $M = \mathbb{R}_{\geq 0}$, en d een gewone metric.
(2) $M = \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ en $d = (d_1, d_2)$ waar $d_i\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ is een gewone metric.

Een eerste doel zou zijn om de basisch dingen te definiëren en controleren, b.v.b. een topologische ruimte maken uit een monoid-metric, een metric-morfism geeft een continue afbeelding, ... Daarna zou het leuk zijn om te begrijpen tot hoe ver de voorbeelden die boven staat 'alle voorbeelden zijn'. Om dit precise te maken, zou je bijvoorbeeld kunnen vragen of elke monoid-geinducert topologie een (gewone) metrische topologie is?

Date: January 10, 2022.