Distributies op $(\frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})^k$.

BSc-project. Begeleider: Marco Streng

Notatie: voor elke $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ schrijven we $\langle x\rangle \in [0,1)$ voor de kleinste niet-negatieve representant.

Zij k een natuurlijk getal. Een **distrbutie op** $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k$ is een afbeelding g van $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k$ naar een abelse groep die voldoet aan

$$\sum_{\substack{y\in(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k\\ dy=x}} g(y) = g(x) \tag{1}$$

voor alle positieve gehele getallen d en alle $x \in (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k$.

Voorbeelden van distributies voor $k=1$ and $k=2$ zijn de afbeeldingen

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R} : x \mapsto \langle x\rangle - \frac{1}{2}$$

en

$$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2 \to \mathbf{R} : (x,y) \mapsto \langle x\rangle^2 - \langle x\rangle + \frac{1}{6}.$$

Algemener, zij $B_k \in \mathbf{Q}[t]$ het k-de Bernouilli-polynoom. Dan is voor elke primitieve vector $v \in \mathbf{Z}^k$ de afbeelding

$$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k \to \mathbf{R} : x \mapsto B_k(\langle v\cdot x\rangle)$$

een distributie.

Nu is $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ oneindig, dus gaan we het onszelf iets makkelijker maken door slechts naar eindige ondergroepen te kijken. Zij N een positief geheel getal en $\Gamma = (\frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})^k$. Een **distributie op** Γ is een afbeelding van Γ naar een abelse groep die voldoet aan (1) voor alle positieve delers d van N en alle $x \in \Gamma$. Elke distributie op $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^k$ geeft voor elke N een distributie op Γ, dus voorbeelden hebben we al.

Een distributie g heet **even** als daarnaast

$$g(-x) = g(x) \tag{2}$$

geldt voor alle x in het domein.

We willen alle mogelijke distributies in één object vatten, en dat doen we als volgt. De **universele distributie van graad** 0 op Γ is een distributie h op Γ zo dat er voor elke distributie g op Γ een uniek homomorfisme f bestaat met $g = f\circ h$. Je krijgt deze door de vrije abelse groep op Γ uit te delen naar de ondergroep voortgebracht door de relevante relaties van (1).

Op dezelfde manier is er ook de **universele even distributie** op Γ, op dezelfde manier gedefinieerd met een aantal keer het woord "even" toegevoegd. Dan moet ook naar (2) worden uitgedeeld.

Kubert en Lang geven een eenvoudige en elegante basis voor de universele distributie [2, Theorem I.6.1] en een erg ingewikkelde bijna-basis voor de universele even distributie [1].

Doel van dit project is het bij elkaar zoeken van theorie die enigszins versnipperd in de literatuur lijkt te staan, en hopelijk een mooie basis te vinden voor de universele even distributie. De toepassing van distributies die ik (net als [1, 2]) in gedachten heb (modulaire eenheden) gaat te ver voor dit project, maar deze distributies schijnen op meer plaatsen in de literatuur voor te komen, dus mogelijk kan de student mij daar ook iets over leren.

Voorkennis: Algebra 1 (vooral abelse groepen, modulorekenen, Chinese reststelling en dergelijke) en Algebra 2 (vooral modulen over hoofdideaaldomeinen).

Referenties:

[1] Dan Kubert. A system of free generators for the universal even ordinary $Z_{(2)}$ distribution on Q^{2k}/Z^{2k}. *Math. Ann.*, 224(1):21–31, 1976.

[2] Daniel S. Kubert and Serge Lang. *Modular units*, volume 244 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.