

BSc-project: Distributies op abelse groepen

Begeleider: Marco Streng

Hoofddoel van het project: het begrijpen van de *even distributies op* $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$.

Definitie

Zijn N en k positieve gehele getallen en $A = (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^k$. Een *distributie op* A is een afbeelding g van A naar een additieve abelse groep B die voldoet aan

$$\sum_{\substack{y \in A \\ dy=x}} g(y) = g(x) \quad (1)$$

voor alle positieve gehele getallen $d \mid N$ en alle $x \in dA$.

Een distributie g heet *even* als daarnaast

$$g(-x) = g(x) \quad (2)$$

geldt voor alle $x \in A$.

Distributies voor $k = 1$ spelen een belangrijke rol in de studie van cyclotomische lichamen $\mathbf{Q}(\zeta_N)$ [3] en distributies voor $k = 2$ spelen dezelfde rol voor *modulaire functielichamen* [2].

Voorbeelden

Een flauw, maar instructief voorbeeld krijg je door B en $b \in B$ willekeurig te kiezen en dan

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \neq 0, \\ b & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Dit is een even distributie op A .

In het geval waarin N een priemgetal is, is een distributie simpelweg een afbeelding g met $\sum_{x \neq 0} g(x) = 0$.

In de appendix staan families van mooie voorbeelden voor alle k en N , maar voor het project zijn de twee voorbeelden hierboven waarschijnlijk relevanter.

De universele distributie

We willen alle mogelijke distributies op A in één object vatten, en dat doen we als volgt. De *universele distributie op* A is een distributie h op A zo dat er voor elke distributie g op A een uniek homomorfisme f bestaat met $g = f \circ h$. In diagramvorm:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & U \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & B. \end{array}$$

Je krijgt h door de vrije abelse groep $\mathbf{Z}^{(A)}$ op A uit te delen naar de ondergroep voortgebracht door de relaties van (4).

Er is ook de *universele even distributie* op A , op dezelfde manier gedefinieerd met een aantal keer het woord “even” toegevoegd. Dan moet ook naar (2) worden uitgedeeld.

Kubert en Lang geven een eenvoudige en elegante basis voor de universele distributie [2, Theorem I.6.1] en een erg ingewikkelde bijna-basis voor de universele even distributie [1].

Doelen

Doelen van het project zijn het bij elkaar zoeken van theorie die enigszins versnipperd in de literatuur lijkt te staan, en hopelijk een mooiere bijna-basis te vinden voor de universele even distributie voor $k = 2$. Dit is dus een combinatie van literatuuronderzoek en puzzelen.

Voorkennis

Algebra 1 (vooral abelse groepen, modulorekenen, Chinese reststelling en dergelijke) en Algebra 2 (vooral $\mathbf{Z}$ -modulen).

Referenties

- [1] Daniel S. Kubert. A system of free generators for the universal even ordinary $Z_{(2)}$ distribution on Q^{2k}/Z^{2k} . *Math. Ann.*, 224(1):21–31, 1976.
- [2] Daniel S. Kubert and Serge Lang. *Modular units*, volume 244 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.
- [3] Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*, volume 83 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

Appendix: meer voorbeelden

Zij $B_k(x) \in \mathbf{Q}[x]$ het k -de Bernoulli-polynoom, gegeven door

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!},$$

dus bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} B_1(x) &= x - \frac{1}{2} && \text{en} \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Gegeven $z \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ schrijven we $\langle z \rangle \in [0, 1)$ voor de kleinste niet-negatieve representant van z . De afbeelding

$$\begin{aligned} F_k : \mathbf{R}/\mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ z &\longmapsto B_k(\langle z \rangle) \end{aligned}$$

voldoet dan aan

$$d^{k-1} \sum_{\substack{y \in \mathbf{R}/\mathbf{Z} \\ dy=x}} F_k(y) = F_k(x) \tag{3}$$

voor alle $d \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ en $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

De afbeelding

$$\begin{aligned} G_k : (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^k &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x = (x_1, \dots, x_k) &\longmapsto B_k(\langle x_1 \rangle) \end{aligned}$$

voldoet dus aan

$$\sum_{\substack{y \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^k \\ dy=x}} G_k(y) = G_k(x) \tag{4}$$

voor alle $d \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ en $x \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^k$.

Als gevolg is voor elke $v \in \mathbf{Z}^k$ met $\text{ggd}(N, v_1, \dots, v_k) = 1$ de afbeelding

$$\begin{aligned} g_v : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^k &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto B_k\left(\left\langle \frac{v \cdot x}{N} \right\rangle\right) \end{aligned}$$

een distributie (dit observeer je eerst voor $v = e_1$ en bewijs je daarna voor elke v door samen te stellen met een automorfisme van $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^k$). Voor even k is deze distributie even.