

Niet-torsiepunten op elliptische krommen (begeleider: R. de Jong)

Wanneer F een homogeen polynoom is in $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ van graad $d > 0$ schrijven we $Z(F)$ voor de algebraïsche kromme die door F wordt gedefinieerd in het complexe projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. We zijn geïnteresseerd in zulke F van graad $d = 3$ waarvoor $Z(F)$ glad is. (Met kans 1 is aan deze voorwaarde voldaan.)

Neem een punt O op een dergelijke $E = Z(F)$. Het blijkt dat de volgende bewerking een structuur van abelse groep $\oplus$ op E definieert met neutraal element O : voor P, Q op E laat R het derde snijpunt zijn van de lijn door P en Q met E (neem de raaklijn als $P = Q$). Definieer dan $P \oplus Q$ als het derde snijpunt van de lijn door O en R met E . We noemen de groeps-kromme (E, O) een *elliptische kromme*.

Men kan bewijzen dat de torsie-ondergroep van E aftelbaar is. Preciezer, voor elke $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ bestaat de groep $E[n]$ van n -torsiepunten uit precies n^2 elementen. (Bijvoorbeeld, als voor O een van de 9 buigpunten van E wordt gekozen, dan is $E[3]$ precies de verzameling buigpunten van E .) Aangezien E zelf overaftelbaar is, volgt dat er niet-torsiepunten bestaan op E .

Zij $\overline{\mathbb{Q}}$ het deellichaam van $\mathbb{C}$ bestaande uit de algebraïsche getallen. We zijn nu geïnteresseerd in F als boven maar met de extra eis dat $F \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y, Z]$. (Een eerste opmerking die men hier moet maken is dat er nog steeds zulke F bestaan: de voorwaarde dat $E = Z(F)$ glad is kan namelijk worden verwoord in termen van een polynoomrelatie op de coëfficiënten van F .) Ook kijken we alleen naar de verzameling $E(\overline{\mathbb{Q}})$ van punten $(a : b : c)$ op E waarvoor a, b, c alle in $\overline{\mathbb{Q}}$ gekozen kunnen worden.

Stelling: er bestaat een niet-torsiepunt in $E(\overline{\mathbb{Q}})$.

Doel van dit project is om een of meerdere bewijzen van deze Stelling te zien. Merk op dat de verzameling $E(\overline{\mathbb{Q}})$ aftelbaar is en dat dus het boven gegeven argument niet meer werkt. Er zal iets meer techniek gebruikt moeten worden.

Als er tijd over is kan ook naar veralgemeningen worden gekeken: wat gebeurt er als je $\overline{\mathbb{Q}}$ vervangt door andere aftelbare algebraïsch afgesloten deellichamen van $\mathbb{C}$? Kunnen we ook naar elliptische krommen over aftelbare algebraïsch afgesloten lichamen van positieve karakteristiek kijken? (De torsie-ondergroep is nog steeds aftelbaar.) Interessant is in dit licht dat de Stelling hierboven *niet waar* is voor een algebraïsche afsluiting van een eindig lichaam; dit is eenvoudig in te zien. Wat kunnen we zeggen als je de elliptische kromme vervangt door een hogerdimensionale projectieve groepsvariëteit?

Benodigde voorkennis: de standaard Algebra-vakken en het college Algebraic Curves.