

Het construeren van reële afsluitingen

Een *geordend lichaam* is een lichaam K voorzien van een ondergroep P van de multiplicatieve groep K^* van K met de eigenschappen (1) als $x, y \in P$, dan $x + y \in P$, en (2) met de notatie $-P = \{-x : x \in P\}$ geldt $K^* = P \cup (-P)$. De elementen van P heten dan *positief* en een totale ordening op K wordt gegeven door: $x > y \Leftrightarrow x - y \in P$. Voorbeeld: zowel $K = \mathbf{Q}$ als $K = \mathbf{R}$ kan op een unieke manier geordend worden, namelijk door voor P de verzameling rationale of reële getallen te nemen die in de gebruikelijke zin positief zijn. Als we zo'n geordend lichaam noteren met (K, P) , dan heet een geordend lichaam (L, Q) een *uitbreiding* van (K, P) als L een lichaamsuitbreiding van K is en er geldt $P = Q \cap K$.

Een *reëel afgesloten lichaam* is een geordend lichaam (K, P) zodanig dat de enige uitbreiding (L, Q) van (K, P) waarvoor L algebraïsch over K is, gelijk is aan (K, P) zelf. Het blijkt dat een lichaam K een ordening P heeft waarvoor (K, P) een reëel afgesloten lichaam is dan en slechts dan als K een algebraïsche afsluiting $\bar{K}$ heeft met $1 < [\bar{K} : K] < \infty$, en dat de enige ordening op zo'n K gegeven wordt door $P = \{x^2 : x \in K^*\}$.

Als (K, P) een geordend lichaam is, dan is een *reële afsluiting* van (K, P) een reëel afgesloten lichaam (L, Q) waarvoor L algebraïsch over K is. Voor $K = \mathbf{Q}$ vormt de verzameling reële algebraïsche getallen bijvoorbeeld een reële afsluiting. In de leerboeken wordt altijd gewezen op de analogie met algebraïsche afsluitingen; evenals elk lichaam K een op K -isomorfie na unieke algebraïsche afsluiting $\bar{K}$ heeft, geldt namelijk dat elk geordend lichaam een op K -isomorfie na unieke reële afsluiting heeft. Wat de leerboeken minder benadrukken is dat de situatie met geordende lichamen in feite veel beter is: de reële afsluiting van een geordend lichaam is *uniek uniek*, dat wil zeggen, als (L, Q) en (M, S) twee reële afsluitingen van een geordend lichaam (K, P) zijn, dan is er een *uniek* lichaamsisomorfisme $L \rightarrow M$ dat de identiteit op K is. De analoge bewering voor algebraïsche afsluitingen is foutief.

Nu zegt een algemene timmermanswijsheid dat wiskundige zaken die uniek uniek zijn, ook concreet kunnen worden opgeschreven. Dat is evenwel niet de manier waarop men doorgaans reële afsluitingen construeert, hetgeen met behulp van het lemma van Zorn gebeurt. Een concrete constructie van de reële afsluiting blijkt moeilijk in de literatuur te vinden. Wel is bekend dat het lemma van Zorn vermeden kan worden, zie: Tomas Zander, *Existence and uniqueness of the real closure of an ordered field without Zorn's lemma*, J. Pure Appl. Algebra **73** (1991), 165–180; de daar gevonden constructie kan echter moeilijk “concreet” genoemd worden.

Het voornaamste doel van het project is toch te komen tot een constructie van de reële afsluiting van een geordend lichaam die men concreet kan noemen. Tegelijkertijd is het de bedoeling om de in de leerboeken gevonden bewijzen op een conceptuele manier te verbeteren met gebruikmaking van de *signatuur* van een kwadratische vorm over een geordend lichaam.

De voorkennis voor het project bestaat uit algebra en Galoistheorie. Er zal ook gebruik gemaakt worden van groepentheorie en van stellingen over kwadratische vormen, maar kennis hiervan kan tijdens het onderzoek verworven worden.

Begeleider: Hendrik Lenstra