TENTAMEN ALGEBRA 2

22 december 2011, 10-13 uur

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

OPGAVE 1.

5 a) Bepaal $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ zodat $\alpha(2+3i) + \beta(5+5i) = 1$.

5 b) Bepaal $x \in \mathbb{Z}[i]$ zodat $x \equiv 1 \pmod{2+3i}$, $x \equiv -1 \pmod{5+5i}$.

OPGAVE 2.

Ga na of de volgende polynomen irreducibel zijn; zo niet ontbind ze:

5 a) $X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 6X + 7$ in $\mathbb{F}_2[X]$, $\mathbb{F}_3[X]$, $\mathbb{Z}[X]$.

3 b) $X_1^3 + X_2^3 + 1$ in $\mathbb{C}[X_1, X_2]$.

2 c) $X_1^3 + X_2^3 + \cdots + X_n^3 + 1$ in $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ $(n \geq 2)$.

OPGAVE 3. (10 pt)

Gegeven is het polynoom $f(X) = X^3 - s_1X^2 + s_2X - s_3 = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$ met $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$. Neem aan dat $\alpha_i + \alpha_j \neq 0$ voor alle paren i, j met $1 \leq i < j \leq 3$. Druk de coëfficiënten van

$$\left(X - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)\left(X - \frac{1}{\alpha_2 + \alpha_3}\right)\left(X - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_3}\right)$$

uit in s_1, s_2, s_3.

OPGAVE 4.

Gegeven is de ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{15}] = \{a + b\sqrt{15} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Voor $\alpha = a + b\sqrt{15} \in R$ definiëren we $N(\alpha) := a^2 - 15b^2$.

3 a) Laat zien dat $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ voor $\alpha, \beta \in R$ en dat voor $\alpha \in R$ geldt dat $\alpha \in R^* \iff N(\alpha) = \pm 1$.

5 b) Laat zien dat $(3, \sqrt{15})$ een maximaal ideaal maar geen hoofdideaal is van R. Laat verder zien dat $(3, \sqrt{15})^2$ een hoofdideaal van R is.

4 c) Is R een ontbindingsring?

3 d) Laat zien dat R^* oneindig is.

ZOZ

OPGAVE 5.

Zij $M = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ de ring van 2×2-matrices met elementen uit $\mathbb{Z}$, met de gebruikelijke matrixoptelling en -vermenigvuldiging. Definieer de afbeelding

$$f : \mathbb{Z}[i] \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}) : a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

2 a) Laat zien dat f een injectief ringhomomorfisme definieert.

5 b) We definiëren op M de volgende scalaire vermenigvuldiging met $\mathbb{Z}[i]$:

$$(a + bi) \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

Uit a) volgt dat M met matrixoptelling en deze scalaire vermenigvuldiging een $\mathbb{Z}[i]$-moduul is. Bepaal een basis van M over $\mathbb{Z}[i]$.

4 c) Laat zien dat

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ z & z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

een deel-$\mathbb{Z}[i]$-moduul van M definieert. Laat verder zien dat N een cyclisch $\mathbb{Z}[i]$-moduul is en geef een voortbrenger.

4 d) Bewijs dat M/N als $\mathbb{Z}[i]$-moduul isomorf is met $\mathbb{Z}[i]$.

MAXIMAAL AANTAL TE BEHALEN PUNTEN: 60
CIJFER = (AANTAL BEHAALDE PUNTEN)/6